هندسه یازدهم

فصل اول

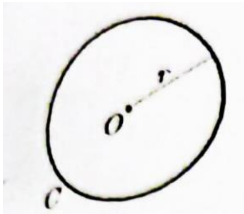
مبحث : دایره

مدرس : علیرضا مظاهری

درس اول

(مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره)

مفاهیم اولیه

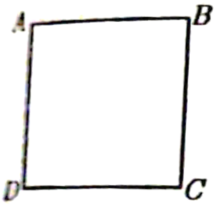


تعریف: دایره مجموعه همه نقاطی از صفحه است که از نقطه ثابتی مانند O در آن صفحه، به فاصله ثابت r باشند. به عبارت دیگر هر نقطه روی دایره فاصله اش از O برابر r است و هر نقطه‌ای که فاصله اش از O برابر r باشد روی دایره قرار دارد.

نقطه‌ی ثابت O را مرکز و فاصله‌ی ثابت r را شعاع دایره می‌گوییم. معمولا این دایره را با نماد $C(O,r)$ نشان می‌دهیم.

مثال 1 : پاره خط AB به طول 5 سانتی متر مفروض است. دایره های $C(A,1)$ و $C'(B,2)$ را رسم کنید.

مثال 2 : مربع ABCD به ضلع 2 را در نظر بگیرید به مراکز راس های این مربع و شعاع 2 ، دایره هایی رسم کنید. قسمت مشترک بین هر چهار دایره را مشخص کنید.



مثال 3 : از نقطه مفروض A چند دایره در صفحه می گذرد؟

مثال 4 : از دو نقطه متمایز A و B چند دایره می گذرد؟

مثال 5 : کوچکترین دایره گذرنده از دو نقطه متمایز A و B کدام است؟

1) دایره به مرکز A و شعاع AB
2) دایره به قطر AB
3) دایره به مرکز M وسط AB و شعاع AB
4) دایره به مرکز B و شعاع AB

مثال 6 : از سه نقطه متمایز A ، B و C که روی یک خط قرار دارند چند دایره عبور می کند؟

1) هیچ
2) 1
3) 2
4) بیشمار

مثال 7 : دایره ای رسم کنید که از سه راس مثلث ABC عبور کند.

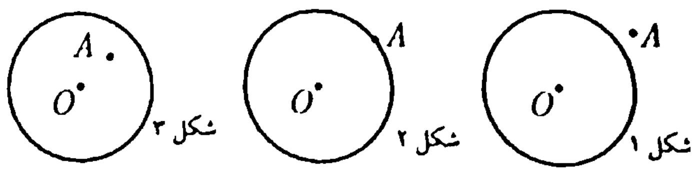
نتیجه: از سه نقطه A ، B و C که روی یک خط قرار ندارند، دقیقاً یک دایره عبور می کند.

نکته 1 : (اوضاع نسبی یک نقطه و یک دایره). نقطه A و دایره $C(O,r)$ یک از سه وضعیت زیر را نسبت به هم دارند:

الف) نقطه A بیرون دایره است. در این حالت: $OA > r$ (شکل 1) (فاصله A تا مرکز دایره بزرگتر از شعاع دایره است)

ب) نقطه A روی دایره است. در این حالت: $OA = r$ (شکل 2)

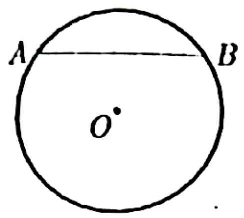
پ) نقطه A درون دایره است. در این حالت: $OA < r$ (شکل 3)



مثال 8 : دایره $C(O,13)$ مفروض است. نقطه A و از مرکز O به فاصله 3m-5 قرار دارد اگر A درون دایره باشد m کدام می تواند باشد؟

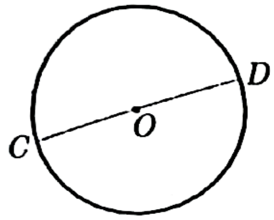
1) 7
2) 6
3) 4.5
4) 5

یادآوری چند مفهوم دایره



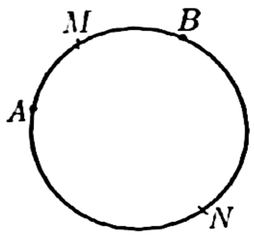
شعاع دایره: پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه ای روی دایره باشد.

وتر دایره: پاره خطی است که دو سر آن روی دایره باشد. (مانند وتر AB در شکل روبرو)



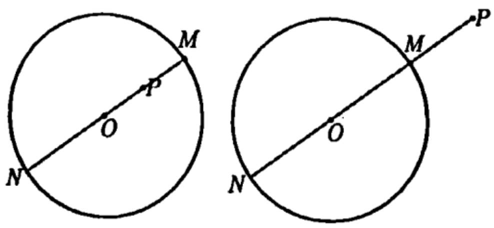
قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می گذرد قطر نام دارد.

قطر دایره بزرگترین وتر دایره است و اندازه آن دو برابر شعاع دایره است. $(CD = 2r)$

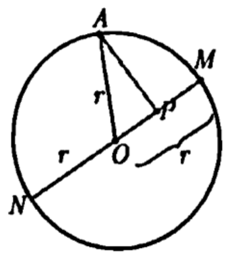


کمان: کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است. هر دو نقطه از دایره مانند A و B دو کمان AB را روی دایره مشخص می کنند. برای مشخص کردن آنها می توان از نقطه دیگری روی هر کمان استفاده کرد. (مانند کمان های AMB و ANB در شکل مقابل)

معمولا منظور از کمان AB ، کمان کوچکتر مشخص شده توسط A و B است.



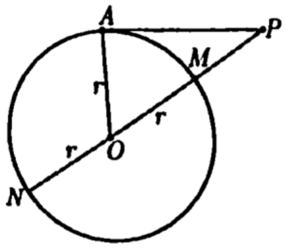
نکته 2 : نزدیکترین و دورترین نقطه دایره $C(O,r)$ نسبت به نقطه ثابت P ، دو سر قطری از دایره است که از P می‌گذرد. (یا امتداد آن از P می‌گذرد.) در شکل مقابل، M نزدیکترین نقطه و N دورترین نقطه دایره تا P است.



اثبات: فرض کنیم A نقطه‌ای دلخواه از دایره باشد؛ می خواهیم ثابت کنیم:

$$PM \le PA \le PN$$

در صورتی که P درون یا بیرون دایره باشد، آنگاه از A به O وصل می‌کنیم. بنابر نامساوی مثلثی در مثلث AOP داریم:



$$AO+OP>AP \Rightarrow r+OP>AP \Rightarrow NP>AP$$

$$AP>|OP-AO| \Rightarrow AP>|OP-r| \Rightarrow AP>PM$$

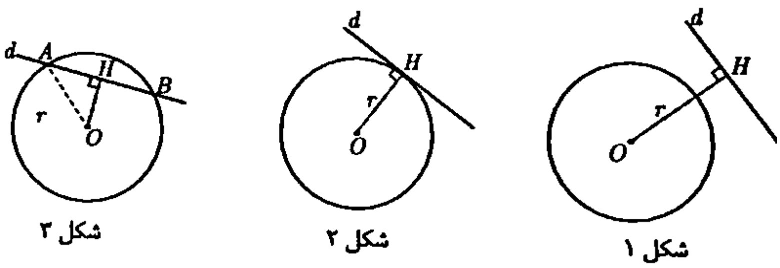
مثال 9 : نزدیکترین و دورترین نقاط دایره $C(O,r)$ نسبت به نقطه A به فاصله 4 و 10 واحد از آن قرار دارند، شعاع دایره را بیابید.

نکته 3 : (اوضاع نسبی یک خط و یک دایره). خط d و دایره $C(O,r)$ یکی از سه حالت زیر را نسبت به هم دارند: (H پای عمودی است که از نقطه O بر خط d رسم می شود)

الف) خط d و دایره $C(O,r)$ نقطه اشتراک ندارند. در این حالت گوییم خط d و دایره C متخارج اند. $r<OH$ (شکل 1) (فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع دایره بزرگتر است)

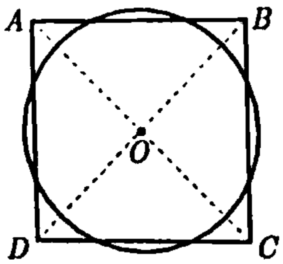
ب) خط d و دایره $C(O,r)$ تنها در یک نقطه مشترک اند. در این حالت گوییم خط d بر دایره C مماس است. $r=OH$ (شکل 2)

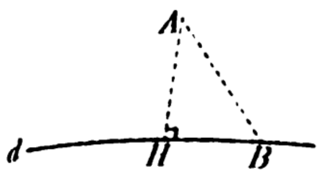
پ) خط d و دایره $C(O,r)$ در دو نقطه A و B مشترک اند. در این حالت گوییم خط d و دایره C متقاطع اند. $r>OH$ (شکل 3) (در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می نامیم)



مثال 10 : خط d به فاصله $\sqrt{10}$ از مرکز دایره $C\left(O,\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ قرار دارد. خط d با دایره چند نقطه مشترک دارد؟

مثال 11 : دایره‌ای به مرکز O و شعاع r اضلاع مربع ABCD به طول ضلع a را در 8 نقطه قطع می کند نشان دهید: $\frac{a}{2}<r<\frac{a\sqrt{2}}{2}$





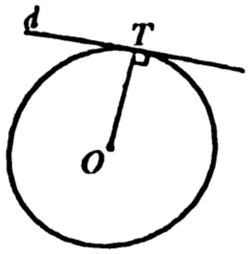
یادآوری: فاصله نقطه از خط، فرض کنیم d خط مورد نظر و A نقطه مورد نظر غیر واقع بر d و نقطه H پای عمودی باشد که از A به d رسم می شود. اندازه پاره خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است.

بدیهی است که فاصله نقطه A از سایر نقاط خط d ، از AH بزرگتر است. $(AB>AH)$

نتیجه: اگر فاصله نقطه ای مانند H روی خط d از A ، از فاصله بقیه نقاط روی خط d از A کوچک تر باشد. AH بر d عمود است.

حال اگر خط d در نقطه T بر شعاع OT عمود باشد، از آنجایی که فاصله تمام نقاط دیگر خط d تا O بزرگتر از OT است، می‌توان نتیجه گرفت که تمام نقاط خط d غیر از T در بیرون دایره قرار دارند در نتیجه خط d با دایره فقط یک نقطه تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

نتیجه: یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود باشد.



نکته 4 : اگر خط d در نقطه T بر دایره $C(O,r)$ مماس باشد آنگاه شعاع OT بر خط d عمود است.

اثبات: T نزدیکترین نقطه خط d به نقطه O است. زیرا بقیه نقاط خط d بیرون دایره قرار دارند و فاصله اشان از O بیشتر از r است ولی فاصله T تا O ، r است. پس با توجه به نتیجه قبل OT بر d عمود است.

مثال 12 : نقطه T روی دایره $C(O,r)$ واقع است. در نقطه T خط مماس بر دایره را رسم کنید.

مثال 13 : دو خط موازی به فاصله 5 سانتی متر و دایره $C(O,3)$ مفروض اند اگر دایره بر یکی از دو خط موازی مماس باشد وضعیت دایره و خط دیگر را مشخص کنید.

مثال 14 : دو مماس عمود بر هم بر دایره $C\left(O,12\sqrt{2}\right)$ در نقطه M متقاطع اند. طول OM برابر کدام است؟

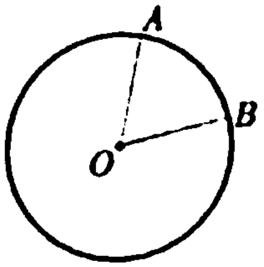
1) 16
2) 18
3) 20
4) 24

مثال 15 : نزدیکترین و دورترین نقاط دایره $C(O,R)$ نسبت به نقطه A بیرون دایره به فاصله 18 و 32 واحد از آن قرار دارند. از A ، مماس AT را بر دایره رسم میکنیم اندازه AT چقدر است؟

1) 24
2) 25
3) $16\sqrt{2}$
4) $9\sqrt{3}$

زاویه‌ها در دایره:

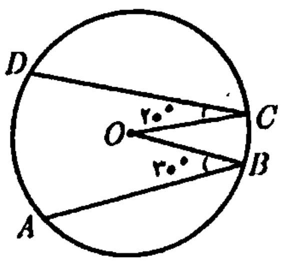
زاویه مرکزی: زاویه ای است که راس آن مرکز دایره و اضلاع آن دو شعاع دایره باشند. (مانند زاویه AOB در شکل مقابل)

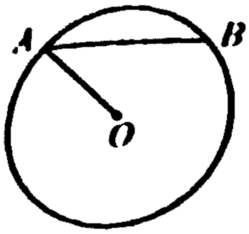


نکته 5 : اندازه کمان همان اندازه زاویه مرکزی مقابلش تعریف می شود و واحد آن درجه است.

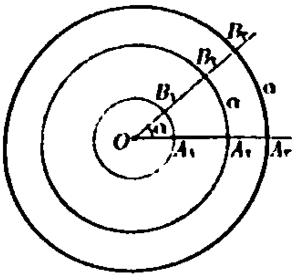
مثلاً در شکل بالا: $AB = A\hat{O}B$ ، یعنی اندازه زاویه مرکزی AOB برابر اندازه کمان AB است.

مثال 16 : در شکل O مرکز دایره است حاصل $AD+BC$ را بیابید.





ایده : معمولاً در مسائلی که قسمتی از شکل به این صورت است، رسم شعاع دیگر و استفاده از مثلث متساوی الساقین تشکیل شده می تواند مفید باشد.



نکته 6 : اندازه کمان با طول کمان متفاوت است. اندازه کمان بر حسب درجه است و طول کمان بر حسب سانتی متر ، متر و... است توجه داریم که اندازه کمان، به کوچکی یا بزرگی شعاع دایره بستگی ندارد. در شکل دایره ها به مرکز O هستند و اندازه کمان های A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 در سه دایره با α برابرند.

$$A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = \alpha$$

در صورتی که طول این کمان ها با هم برابر نیستند.

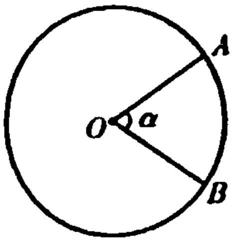
$$\text{طول کمان } A_1B_1 < \text{طول کمان } A_2B_2 < \text{طول کمان } A_3B_3$$

نکته 7 : با توجه به اینکه محیط یک دایره به شعاع R کمانی به اندازه 360 درجه است پس می توان طول یک کمان را بر حسب اندازه زاویه کمان، به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{2\pi R}$$

مثال 17 : در دایره ای به شعاع 4 سانتی متر طول کمان AB برابر $\frac{\pi}{2}$ سانتی متر است. اندازه کمان AB چند درجه است؟

قطاع دایره: ناحیه‌ای از درون و دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می نامند.



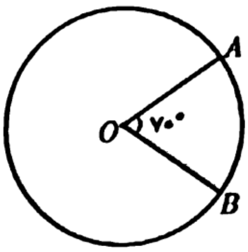
نکته 8 : اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C\left(O,R\right)$ بر حسب درجه مساوی α باشد طول کمان AB برابر است با: $L=\dfrac{\pi R}{180^\circ}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با: $s=\dfrac{\pi R^2}{360^\circ}\alpha$

اثبات:

$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ}=\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}\Rightarrow\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{L}{2\pi R}\Rightarrow L=\frac{2\pi R\alpha}{360^\circ}=\frac{\pi R}{180^\circ}\alpha$$

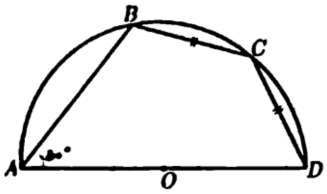
$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ}=\frac{\text{مساحت قطاع}}{\text{مساحت دایره}}\Rightarrow\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{s}{\pi R^2}\Rightarrow s=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}$$

مثال 18 : در دایره $C\left(O,36\right)$ ، مساحت قطاع مشخص شده و طول کمان AB را بیابید.

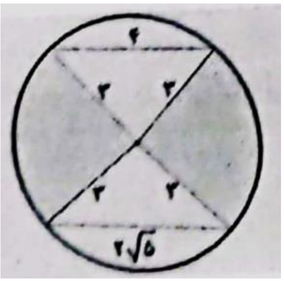


مسئله 1 : در دایره $C\left(O,r\right)$ وتر های AB و CD هم اندازه اند. ثابت کنید کمان‌های نظیر AB و CD نیز هم اندازه هستند.

مثال 19 : در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره است. اندازه زاویه CAD را بیابید.



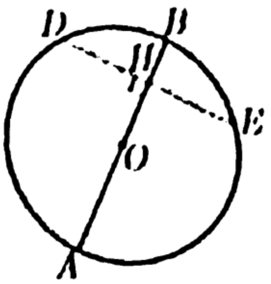
مثال 20 : با توجه به شکل مجموع مساحت های رنگی چقدر است؟



1) 9π
2) $\frac{9}{2}\pi$
3) 6π
4) 3π

مسئله 2 : ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

یعنی: $AB \perp DE \Rightarrow DH = HE \ , \ DB = BE \ , \ DA = EA$



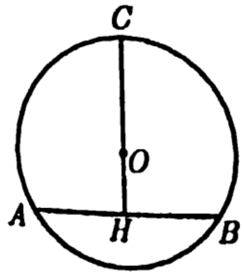
مسئله 3 : ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل میکند، بر آن وتر عمود بوده و کمان متناظر با آن وتر را نیز نصف می‌کند.

تمرین: اگر قطر CD از دایره‌ای کمان AB را نصف کند. ثابت کنید CD بر AB عمود است و ان را نصف می‌کند.

مثال 21 : دو دایره $C(O,2)$ و $C'(O,5)$ مفروض اند. طول وتری از دایره بزرگتر که بر دایره کوچکتر مماس است برابر است با:

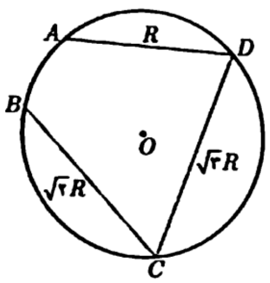
1) $\sqrt{19}$
2) $\sqrt{21}$
3) $2\sqrt{21}$
4) $2\sqrt{19}$

مثال 22 : در شکل، O مرکز دایره است. با فرض $CH=18$, $AB=12$ و شعاع دایره را بیابید.



مسئله 4 : در دایره ای به شعاع r اگر طول وتر AB برابر r باشد آنگاه اندازه کمان AB را به دست آورید و سپس همین مثال را در صورتی که $AB=\sqrt{2}r$, $AB=\sqrt{3}r$ باشد حل کنید.

مثال 23 : شعاع دایره شکل زیر برابر R است و O مرکز دایره است. اندازه کمان AB را بیابید.

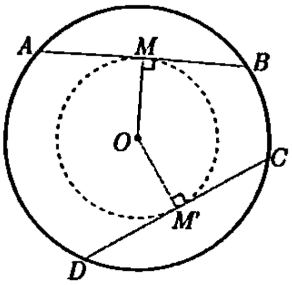


مسئله 5 : در دایره $C(O,r)$ وتری به طول l رسم می کنیم. فاصله مرکز دایره از این وتر را بیابید. $(l \le 2r)$

مسئله 6 : در هر دایره از دو وتر نابرابر، آنکه بزرگتر باشد به مرکز دایره نزدیک تر است.

مسئله 7 : در هر دایره، از دو وتر نابرابر آنکه به مرکز دایره نزدیکتر است، از وتر دیگر بزرگتر است.

نکته 9 : در دایره $C(O,r)$ بیشمار وتر به طول l وجود دارد $(l \le 2r)$ که فاصله تمام آنها از مرکز دایره $\sqrt{r^2-\frac{l^2}{4}}$ است، تمامی این وتر ها بر دایره ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{r^2-\frac{l^2}{4}}$ مماس خواهند بود.



$$OM = OM' = \sqrt{r^2-\frac{l^2}{4}}$$

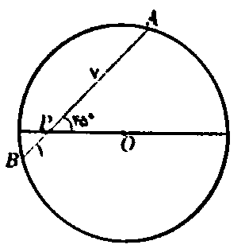
نکته 10 : اگر دو وتر از یک دایره هم اندازه باشند آنگاه فاصله آنها از مرکز دایره یکسان است و برعکس.

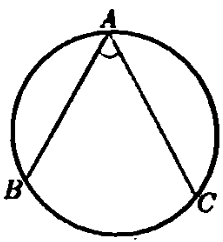
مسئله 8 : نقطه A درون دایره $C(O,R)$ قرار دارد. کوتاه ترین و بلندترین وتر مرسوم از نقطه A را مشخص کنید.

مثال 24 : در دایره $C(O,r)$ طول وتر AB نصف شعاع است از M وسط AB عمود MD را بر OA رسم میکنیم طول AD را بر حسب شعاع دایره بیابید.

مثال 25 : در دایره $C(O,13)$ دو وتر موازی به طول های 10 و 24 رسم شده اند. فاصله این دو وتر را بیابید.

مثال 26 : در شکل زیر شعاع دایره را به دست آورید. (O مرکز دایره است.)



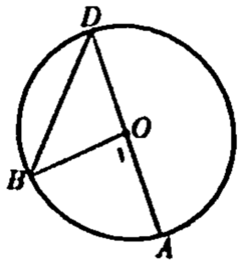


تمرین : در دایره $C(O,R)$ اگر H پای ارتفاع وارد از O بر وتر AB باشد ثابت کنید $AB = 2\sqrt{R^2 - OH^2}$

زاویه محاطی: زاویه ای است که راس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند. (مانند زاویه BAC در شکل)

قضیه 1 : اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است.

اثبات: قضیه را در سه حالت زیر حل می کنیم:

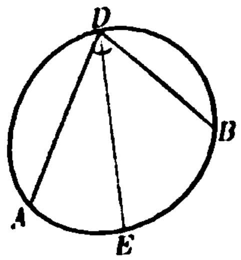


الف) یکی از اضلاع زاویه یعنی AD قطر دایره باشد. در این حالت نقطه B را به O یعنی مرکز دایره وصل میکنیم:

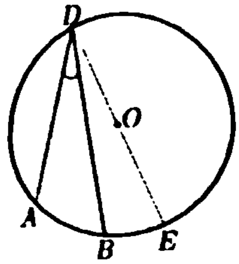
$$\left.\begin{array}{l} OD = OB \Rightarrow \hat{D} = \hat{B} \\ \text{زاویه خارجی } \hat{O}_1 \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{B} + \hat{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{D}$$

و چون $\hat{O}_1$ زاویه مرکزی روبرو به کمان AB است پس: $\hat{O}_1 = AB$ در نتیجه $\hat{D} = \frac{AB}{2}$

ب) دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف مرکز دایره باشد. در این حالت از قسمت (الف) کمک می‌گیریم. قطر گذرنده از D را رسم می کنیم. پس دو زاویه ADE و BDE مانند قسمت (الف) هستند، پس:

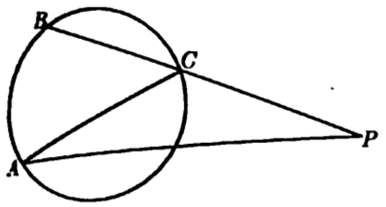


$$\left.\begin{array}{l} A\hat{D}E = \frac{AE}{2} \\ B\hat{D}E = \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{D}B = A\hat{D}E + B\hat{D}E = \frac{AE}{2} + \frac{EB}{2} = \frac{AB}{2}$$



ج) اضلاع زاویه محاطی در یک طرف مرکز دایره باشند. قطر گذرنده از D را رسم کرده و با توجه به شکل و با استفاده از قسمت (الف) اثبات را کامل کنید.

مثال 27 : اگر زاویه P برابر 23 درجه باشد و مثلث ACP متساوی الساقین باشد آنگاه کمان AB چند درجه است؟



1) 69
2) 74
3) 86
4) 92

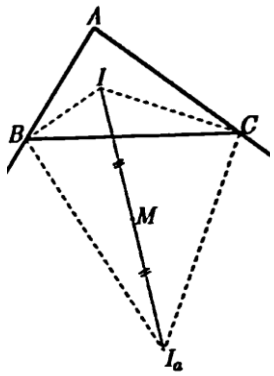
مثال 28 : در دایره $C(O,r)$ قطر AB و نیز وترAC را رسم میکنیم. نقطه D را روی وتر AC چنان انتخاب میکنیم که:

$O\hat{D}A = C\hat{O}B = 60^\circ$, $DO = 5cm$

اندازه پاره خط DC را به دست آورید.

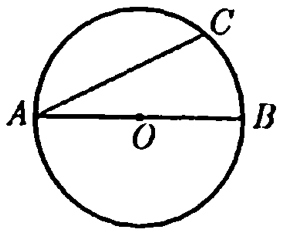
مسئله 9 : امتداد نیمساز A از مثلث ABC ، دایره گذرنده از سه راس مثلث را در D قطع می‌کند اگر I محل همرسی نیمساز ها باشد ثابت کنید. $DI = DB = DC$

مثال 29 : در شکل زیر نقاط I_a , I محل برخورد نیمساز های داخلی و خارجی زوایای B و C هستند. ثابت کنید دایره ای که از رئوس مثلث ABC میگذرد از وسط پاره خطی که I را به I_a وصل می کند می گذرد.

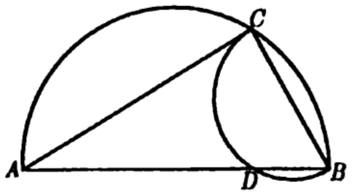


مسئله 10 : ثابت کنید هر زاویه روبروی قطر یک دایره، قائمه است.

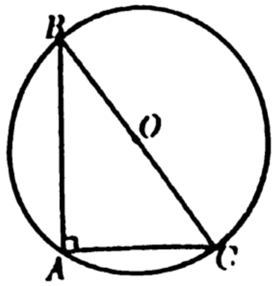
ایده: معمولاً در مسائلی که قسمتی از شکل به این صورت است و O مرکز دایره است. از C به B وصل میکنیم و از اینکه زاویه ACB قائمه است استفاده می کنیم.



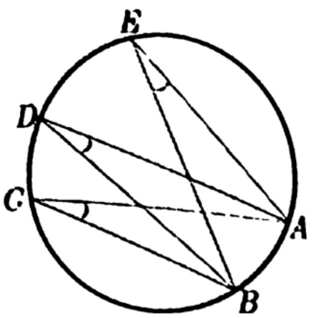
مثال 30 : در شکل نیم دایره هایی با قطر AB و BC رسم شده اند. اگر AD = 6 و BD = 2 باشد اندازه زاویه B را بیابید.



نکته 11 : اگر در مثلث قائم الزاویه‌ای ، دایره‌ای به قطر وتر مثلث رسم کنیم، راس قائمه حتماً روی این دایره خواهد بود.

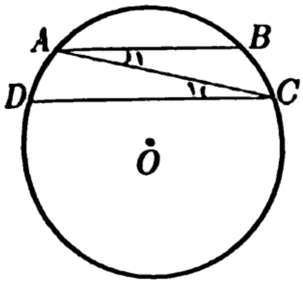


نکته 12 : در یک دایره تمام زاویه های محاطی مقابل به یک کمان با هم برابرند. $\hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \frac{AB}{2}$



نکته 13 : در یک دایره وتر های AB و CD باهم موازی اند. حتما کمان های محصور بین این دو وتر با هم برابرند.

اثبات: نقطه A را به C وصل میکنیم:



$$\left.\begin{array}{r} AB \parallel CD \\ \text{مورب}\ AC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_1=\hat{A}_1 \qquad (1)$$

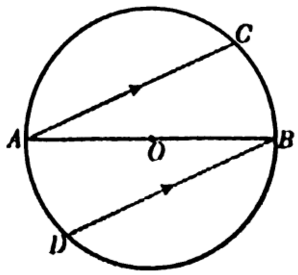
از طرفی زاویه های C_1 و A_1 محاطی اند یعنی:

$$\hat{A}_1=\frac{BC}{2}, \hat{C}_1=\frac{AD}{2} \qquad (2)$$

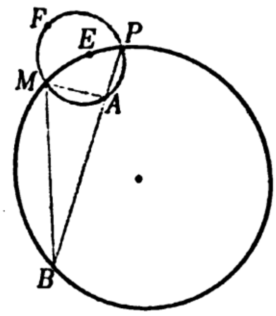
$$(1),(2) \Rightarrow AD=BC$$

توجه کنید عکس این نکته درست نیست (چرا؟)

مثال 31 : در شکل مقابل AB قطر دایره است و $AC \parallel BD$ ، ثابت کنید $AC=BD$

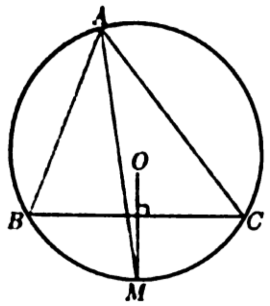


مثال 32 : در دایره‌های شکل مقابل داریم $PAM=100^\circ$ و $PEM=40^\circ$ اندازه زاویه AMB چند درجه است؟

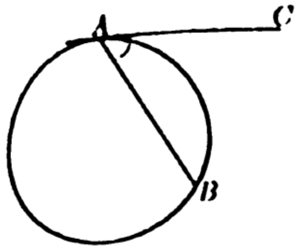


مثال 33 : در مثلث ABC دو دایره به قطر های اضلاع AB و AC رسم میکنیم. ثابت کنید دو دایره یکدیگر را روی ضلع BC یا امتداد آن قطع می‌کنند.

مثال 34 : در شکل روبرو O مرکز دایره و M وسط کمان BC است ثابت کنید $A\hat{M}O=\frac{\left|\hat{B}-\hat{C}\right|}{2}$



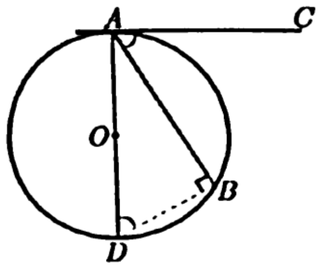
مثال 35 : در مثلث ABC اگر $\hat{A}=60°, BC=6cm$ فاصله محل برخورد نیمساز A و عمود منصف BC را تا B بیابید.



زاویه ظلی: زاویه‌ای است که راس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن شامل وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره باشد. در شکل مقابل $B\hat{A}C$ یک زاویه ظلی است.

قضیه 2 : اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است.

اثبات: قطر گذرنده از A را رسم میکنیم تا دایره را در D قطع کند.



$$\left.\begin{array}{l} D\hat{B}A = 90^\circ \quad (\text{روبرو به قطر}) \\ D\hat{A}C = 90^\circ \quad (\text{طبق نکته } 4) \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{D}A = B\hat{A}C = 90^\circ - D\hat{A}B$$

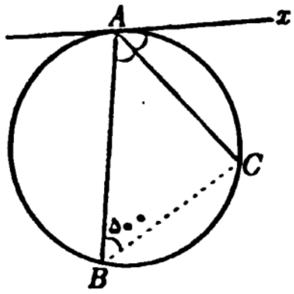
از طرفی چون $B\hat{D}A$ محاطی است پس: $B\hat{D}A = \frac{AB}{2}$ در نتیجه: $B\hat{A}C = \frac{AB}{2}$ در حالتی که مرکز دایره درون زاویه ظلی باشد با رسم قطر گذرنده از راس زاویه ظلی، آن را به یک زاویه قائمه و یک زاویه محاطی تقسیم کرده و حکم به سادگی اثبات می شود و در حالتی که مرکز روی وتر زاویه ظلی باشد حکم بدیهی است.

مثال 36 : در دایره $C(O,r)$ قطره AB با وتر AC زاویه 30 درجه می سازد. مماس در نقطه C بر دایره ، امتداد قطر AB را در نقطه D قطع می‌کند نشان دهید مثلث ACD متساوی الساقین است.

مثال 37 : خط d در نقطه A بر دایره‌ای مماس است. وتر BC از دایره را موازی d رسم کرده ایم ثابت کنید:

$AB = AC$

مثال 38 : در شکل مقابل Ax بر دایره مماس بوده و AC نیمساز زاویه $x\hat{A}B$ است. اگر $A\hat{B}C$ برابر 50 درجه باشد آنگاه کمان AB چند درجه است؟



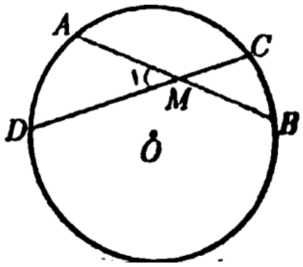
چند زاویه دیگر در دایره:

حال به بررسی زاویه هایی می پردازیم که رئوس آنها درون و یا بیرون یک دایره هستند و اضلاعشان کمان هایی روی دایره جدا می‌کنند.

زاویه بین دو وتر (محل برخوردشان درون دایره است.)

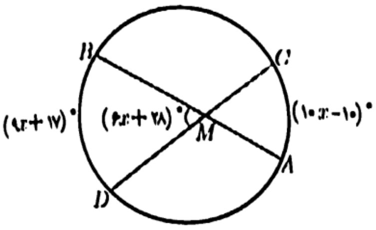
مسئله 11 : در شکل دو وتر AB و CD در نقطه M درون دایره متقاطع هستند ثابت کنید:

$$\hat{M}_1 = \frac{AD + BC}{2}$$



نکته 14 : اگر دو وتر از یک دارای دایره درون دایره متقاطع باشند آنگاه زاویه بین آنها برابر با نصف مجموعه کمان های مقابل آن زاویه است.

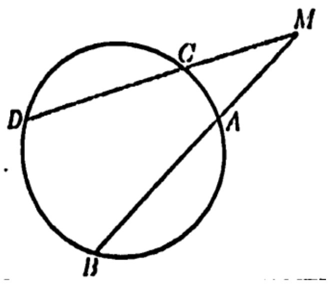
مثال 39 : با توجه به شکل اندازه زاویه BMD چند درجه است؟



زاویه بین دو وتر (محل برخوردشان بیرون دایره است.)

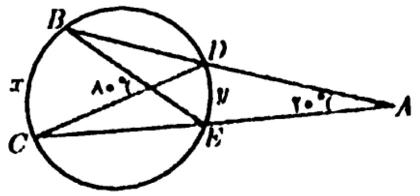
مسئله 12 : در شکل دو وتر BA و DC در نقطه M بیرون دایره متقاطع هستند ثابت کنید:

$$\hat{M}=\frac{BD-AC}{2}$$

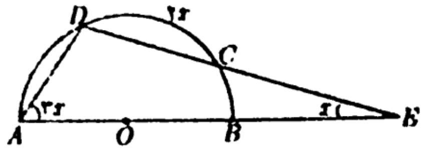


نکته 15 : اگر امتداد دو وتر از یک دایره، بیرون دایره متقاطع باشند آنگاه زاویه بین آنها برابر با نصف قدر مطلق تفاضل کمان های مقابل آن زاویه است.

مثال 40 : با توجه به شکل اندازه های x و y را به دست آورید.

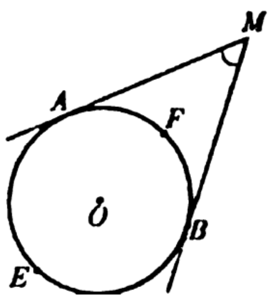


مثال 41 : در شکل، AB قطر و O در مرکز نیم دایره است. اگر $DC = 2x$, $\hat{E} = x$, $\hat{A} = 3x$ ، آنگاه x را به دست آورید.



زاویه بین دو مماس بر دایره:

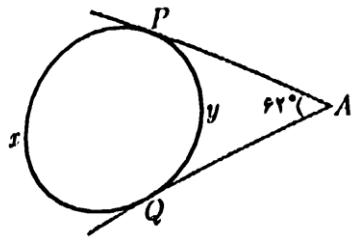
مسئله 13 : در شکل ثابت کنید زاویه بین دو مماس MA و MB برابر $\frac{AEB-AFB}{2}$ است .



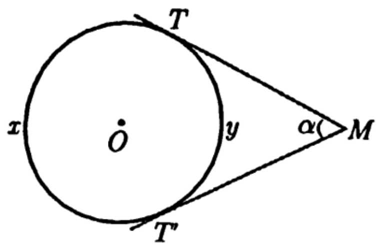
توجه : زاویه بین دو مماس مرسوم از نقطه M بر دایره را زاویه دید از M گوییم. مثلاً اگر $\hat{M} = 60^\circ$ آنگاه می گوییم، دایره از نقطه M به زاویه زاویه 60 درجه دیده می شود.

نکته 16 : اگر از نقطه‌ای دو مماس بر دایره رسم کنیم، آنگاه زاویه بین آن دو مماس برابر با نصف قدر مطلق تفاضل کمان های مقابل آن زاویه است.

مثال 42 : با توجه به شکل اندازه های کمان‌های x و y را مشخص کنید.



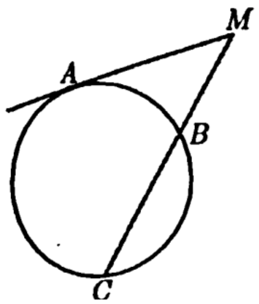
نکته 17 : در صورتی که MT و ’MT بر دایره ای به مرکز O مماس باشند و α زاویه بین این دو مماس باشد آنگاه نتیجه میگیریم:



$$x = 180° + \alpha$$
$$y = 180° - \alpha$$

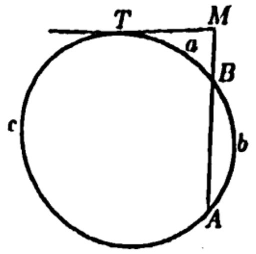
زاویه بین خط مماس و خط قاطع:

مسئله 14 : در شکل MA بر دایره مماس است. ثابت کنید: $\hat{M} = \dfrac{AC - AB}{2}$

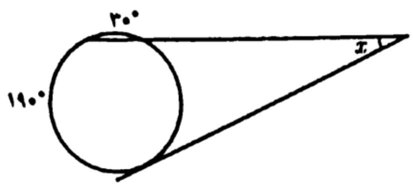


نکته 18 : اگر از نقطه‌ای یک مماس و یک قاطع بر یک دایره رسم کنیم آنگاه زاویه بین آنها برابر با نصف قدر مطلق تفاضل کمان های مقابل آن زاویه است.

مثال 43 : در شکل اگر بین اندازه های کمان های a ، b و c رابطه $a=\frac{b}{4},\frac{c}{7}$ برقرار باشد و MT بر دایره مماس باشد، آنگاه اندازه زاویه M چند درجه است؟

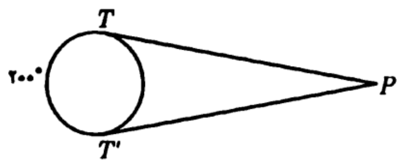


مثال 44 : اندازه زاویه x در شکل مقابل کدام است؟



1) 20°
2) 25°
3) 40°
4) 45°

مثال 45 : در شکل مقابل زاویه بین مماس های پی و پی برابر کدام است؟

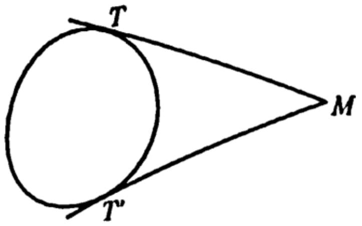


1) 30°
2) 20°
3) 50°
4) 40°

مثال 46 : در دایره‌ای امتداد دو وتر هم اندازه AB و CD در بیرون آن، زاویه 80 درجه می سازد و کمان های داخل این زاویه به نسبت 1 و 5 هستند. اندازه کمان AB چقدر است؟

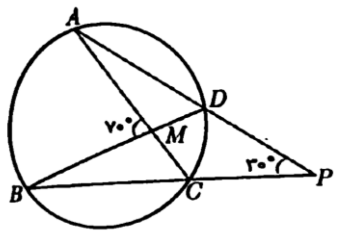
1) 50°
2) 55°
3) 60°
4) 65°

مثال 47 : در دایره شکل مقابل زاویه بین مماس های MT و MT’ برابر 40 درجه است. از نقطه M چه کسری از محیط دایره دیده می شود؟

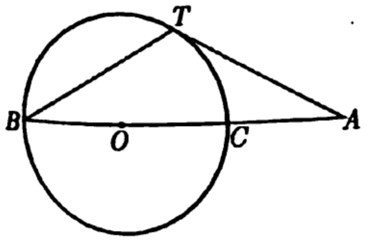


1) $\frac{7}{18}$
2) $\frac{2}{9}$
3) $\frac{8}{19}$
4) $\frac{3}{8}$

مثال 48 : در دایره $C(O,5)$ طول کمان AB را به دست آورید.

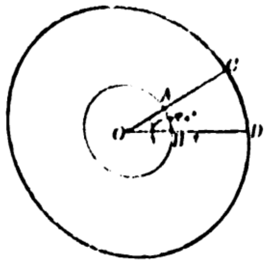


مثال 49 : با توجه به شکل، نقطه O مرکز دایره و اندازه مماس AT برابر اندازه وتر BT است. اندازه زاویه A را بیابید.

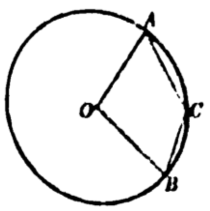


مسائل نمونه فصل اول - درس اول

1. با توجه به شکل اندازه و طول کمان های AB و CD را بیابید (O مرکز هر دو دایره است در شکل مرکز دایره است.)



2. در شکل، O مرکز دایره است، ثابت کنید: $\hat{O}=360°-2\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$

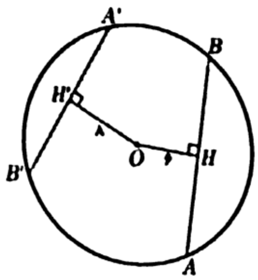


3. خط d مفروض است. مرکز همه دایره هایی که شعاع آن ها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند روی چه شکلی هستند؟ این شکل چه وضعیتی نسبت به d دارد؟

4. دو خط m و n در نقطه A متقاطع اند. دایره‌ای رسم کنید که مرکز آن روی خط n و شعاع آن 2 سانتی متر بوده و بر خط m مماس باشد.

5. در دایره $C(O,R)$ ، داریم: $AB=\alpha$ و $AB=k$. فاصله O از وتر AB را با h نشان میدهیم. ثابت کنید: $h=\frac{k}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$

6. الف) در دایره $C(O,10)$ فاصله وتر AB از مرکز دایره برابر 6 و فاصله وتر A’B’ از مرکز دایره مساوی 8 است. طول وتر های AB و A’B’ را به دست آورید.
ب) چه نتیجه ای درباره فاصله وتر ها از مرکز دایره و اندازه آنها می گیرید؟
پ) آیا این نتیجه همیشه برقرار است؟



7. دو دایره هم مرکز $C(O,R),C'(O,R')$ به طوری که $R>R'$ مفروض اند. ثابت کنید تمام وترهایی از دایره C که بر دایره C’ مماس می شوند هم اندازه هستند.

8. دو دایره $C(O,5),C'(O,3)$ مفروض اند. وتری از دایره بزرگتر طوری رسم میکنیم که بر دایره کوچکتر مماس باشد. طول این وتر را به دست آورید.

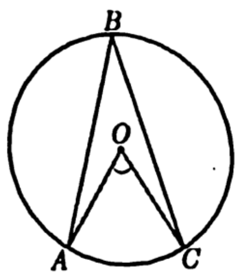
9. خطی دو دایره هم مرکز را قطع میکند ثابت کنید دو پاره خط محصور بین دو دایره برابرند.

10. پاره خط AB به طول k مفروض است. چند دایره به شعاع R از دو نقطه A و B می گذرد؟ (با توجه به مقادیر k و R روی تعداد جواب بحث کنید.)

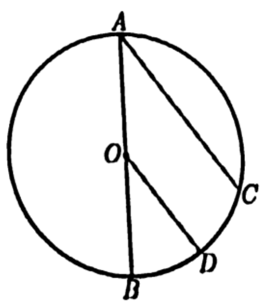
11. دایره $C(O,R)$ مفروض است، نقطه A به فاصله k از O قرار دارد $(k<R)$. درباره تعداد وتر هایی که از A می گذرد و دارای طول t است. با توجه به مقادیر مختلف k ، R و t بحث کنید.

12.دو دایره های C_2, C_1 به مراکز O_2, O_1 در نقاط A و B متقاطع اند از A خطی موازی O_1O_2 رسم می کنیم تا C_1 را در M و C_2 را در N قطع کند. ثابت کنید $MN = 2O_1O_2$

13.در دایره $C(O,r)$ زوایای O و B مفروض اند به طوری که $\hat{B}=(x+16)^{\circ}, \hat{O}=(3x+12)^{\circ}$. اولا مجهول x را به دست آورید. ثانیاً اندازه دو زاویه O و B را محاسبه کنید.



14.با توجه به شکل، O مرکز دایره است و $AC \parallel OD$ ، ثابت کنید نقطه D وسط کمان BC است.



15.دو دایره مساوی در نقاط A و B متقاطع اند ثابت کنید اندازه کمان AB در هر دو دایره برابر است.

16.دو دایره مساوی در A و B یکدیگر را قطع کرده اند از A خطی چنان کشیده ایم که دو دایره را در نقاط C و D قطع کند، ثابت کنید: BC = BD

17.در شکل، چهار ضلعی ADPB یک متوازی الاضلاع است و امتداد PB دایره را در C قطع کرده است. نشان دهید مثلث PCD متساوی الساقین است.

درس دوم

(رابطه های طولی در دایره)

رابطه های طولی

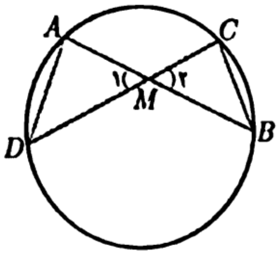
اگر خط های شامل دو وتر از یک دایره یکدیگر را درون یا بیرون دایره قطع کنند بین اندازه پاره خط های حاصل روابطی برقرار است که در ادامه آنها را بیان خواهیم کرد.

هرگاه قاطع رسم شده از نقطه M واقع در صفحه یک دایره آن دایره را در دو نقطه A و B قطع کند آنگاه پاره خط های MA و MB را دو قطعه قاطع رسم شده از نقطه M و یا به طور خلاصه دو قطعه قاطع می‌نامند.

قضیه 1 :

اگر دو وتر دلخواه AB و CD از یک دایره یکدیگر را در نقطه M قطع کنند آنگاه $MC.MD = MA.MB$

اثبات: اگر انتهای وتر ها را مطابق شکل به هم وصل کنیم مثلث های AMD و CMB متشابه خواهند شد، زیرا:

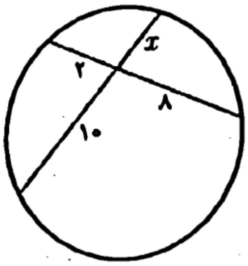


$$\left.\begin{aligned} &\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ &\hat{D} = \hat{B} = \frac{AC}{2} \ \text{(زاویه محاطی)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMD} \sim \overset{\Delta}{CMB}$$

بنابراین با نوشتن نسبت های تشابه داریم:

$$\frac{AD}{BC} = \boxed{\frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} MC.MD = MA.MB$$

مثال 1 : در شکل مقابل x چقدر است؟



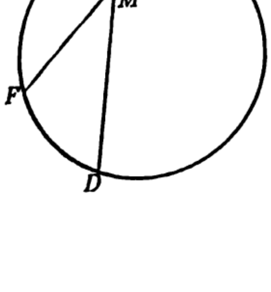
مثال 2 : وتری به طول 15 قطر دایره ای به شعاع 10 را طوری قطع میکند که اختلاف دو قطعه ایجاد شده بر روی قطر 16 باشد. این وتر توسط قطر به چه نسبتی تقسیم شده است؟

مثال 3 : نقطه M روی وتر AB =6 از دایره $C(O,r)$ طوری قرار دارد که 2AM = MB . طول کوتاه ترین وتری که از M در دایره رسم می شود چقدر است؟

مسئله 1 : فرض کنید از نقطه M درون دایره به فاصله d از مرکز دایره $C(O,R)$ وترهای AB و CD را رسم کرده ایم. ثابت کنید: $MA.MB = MC.MD = R^2 - d^2$

نتیجه: حاصل ضرب اندازه قطعات روی هر وتری که از نقطه M داخل دایره بگذرد با هم برابر و مقدار ثابتی است که به فاصله نقطه M از مرکز دایره (d) بستگی دارد و برابر است با $R^2 - d^2$.

$$MA.MB = MC.MD = ME.MF = \dots = R^2 - d^2$$

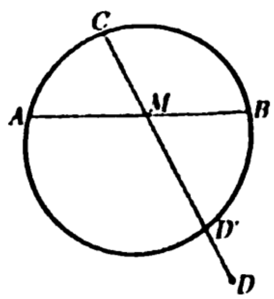


مثال 4 : وتر AB به اندازه 24 از دایره $C(O,14)$ توسط نقطه M به نسبت 1 به 3 تقسیم شده است. فاصله M از مرکز دایره چقدر است؟

1) 9
2) 10
3) $2\sqrt{22}$
4) $3\sqrt{10}$

نکته 1 : (عکس قضیه 1) اگر پاره خط های AB و CD در نقطه M متقاطع باشند و $MA.MB = MC.MD$ ، آن گاه دایره‌ای وجود دارد که از این چهار نقطه می گذرد.

اثبات: به روش برهان خلف:



دایره ای از سه نقطه A ، B و C می‌گذرانیم و فرض میکنیم که MD را در D’ قطع کند (بدیهی است که از سه نقطه A ، B و C غیر واقع بر یک خط یک دایره می گذرد) طبق روابط طولی دایره داریم:

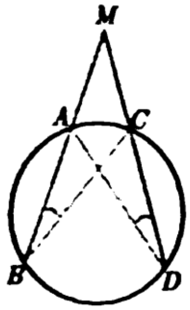
$MA.MB = MC.MD'$

از مقایسه این رابطه با فرض داریم: $MD = MD'$ در نتیجه D بر D’ منطبق است پس دایره از D نیز می‌گذرد.

توجه داریم که تفاوتی نمی‌کند D را در داخل دایره یا بیرون از آن در نظر بگیریم. (D و D’ در یک طرف Mهستند)

نکته 2 : فرض کنیم در چهار ضلعی ABCD قطرها در M متقاطع باشند اگر $MB.MD = MA.MC$ آنگاه دایره ای وجود دارد که از هر 4 راس این چهار ضلعی می گذرد.

قضیه 2 : اگر امتداد دو وتر دلخواه AB و CD از دایره ای در نقطه ای مانند M بیرون دایره یکدیگر را قطع کنند آنگاه $MA.MB = MC.MD$

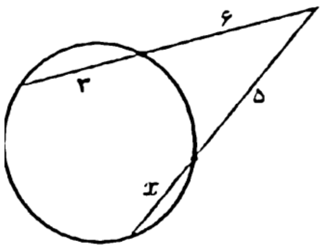


اثبات: اگر انتهای وتر ها را مطابق شکل به هم وصل کنیم مثلث های AMD و CMB متشابه خواهند شد، زیرا:

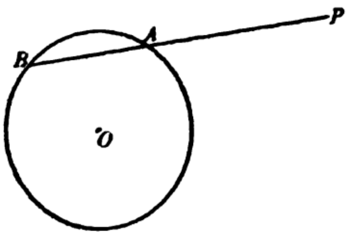
$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}=\hat{M}\\ \hat{B}=\hat{D}=\dfrac{AC}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AMD}\sim\overset{\Delta}{CMB}\Rightarrow \boxed{\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{MD}{MB}}=\dfrac{AD}{BC}\Rightarrow MA.MB=MC.MD$$

تمرین : عکس قضیه قبل را ثابت کنید.

مثال 5 : با توجه به شکل مقدار x را به دست آورید.



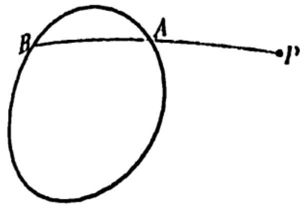
مثال 6 : در دایره $C\left(O,4\right)$ اگر $PA=5, AB=3$ آنگاه طول OP برابر کدام است؟



1) $2\sqrt{21}$
2) $2\sqrt{14}$
3) $4\sqrt{7}$
4) $3\sqrt{7}$

مثال 7 : فاصله نزدیکترین نقطه از دایره به شعاع 5 واحد تا نقطه مفروض P برابر 8 واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که PA – AB =2 . اندازه AB چقدر است؟

1) 5
2) 6
3) 7
4) 9

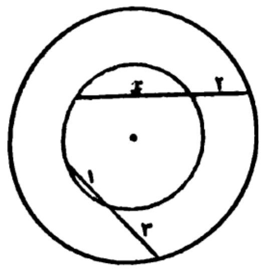


از جمع بندی دو قضیه بالا قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه 3 : هرگاه خط های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند آنگاه $MA.MB = MC.MD$

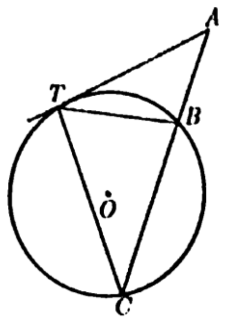
مسئله 2 : فرض کنید نقطه M به فاصله d از مرکز دایره $C(O,R)$ و در خارج دایره واقع باشد. اگر از نقطه M قاطعی بر دایره رسم کنیم تا دایره را در نقاط B و A قطع کند، ثابت کنید: $MA.MB = d^2 - R^2$

مثال 8 : در شکل زیر دو دایره هم مرکز هستند طول x را بیابید.



قضیه 4 : هرگاه A نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از A مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم مربع اندازه مماس برابر است با حاصلضرب اندازه های دو قطعه قاطع.

اثبات: فرض کنید مماس AT و قاطع ABC را بر دایره مطابق شکل رسم کرده باشیم. می خواهیم ثابت کنیم:



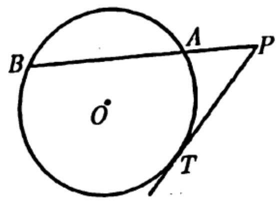
$AT^2 = AB.AC$ (AT واسطه هندسی بین AB و AC است)

برای این کار از تشابه مثلث های ATB و ACT استفاده می کنیم:

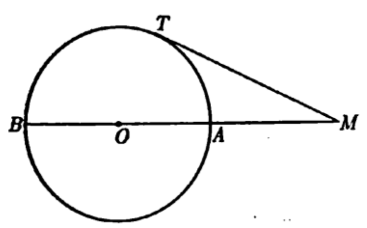
$$\left.\begin{array}{l} A\hat{T}B = A\hat{C}T = \dfrac{TB}{2} \text{ (زاویه ظلی و محاطی روبه یک کمان)} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(\text{ز ز})} \overset{\Delta}{ATB} \sim \overset{\Delta}{ACT} \Rightarrow \frac{AT}{AC} = \frac{AB}{AT} = \frac{TB}{TC} \Rightarrow AT^2 = AB.AC$$

مثال 9 : در شکل PA = 4 و طول مماس PT برابر 6 است. طول وتر AB چقدر است؟



مثال 10 : در دایره به مرکز O طول مماس MT برابر 6 است. اگر MA = 3 آنگاه شعاع دایره برابر کدام است؟



1) 4.5
2) 5.5
3) 3
4) 4

مثال 11 : فاصله دورترین نقطه دایره $C(O,R)$ از نقطه M بیرون دایره برابر 16 و فاصله M تا مرکز دایره برابر $\frac{23}{2}$ است. طول مماس رسم شده از M بر دایره چقدر است؟

1) $4\sqrt{3}$
2) 4
3) $4\sqrt{7}$
4) $2\sqrt{6}$

با جمع بندی مطالب گفته شده به نکته زیر خواهیم رسید.

نکته 3 : هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره $C(O,R)$ باشد، هر قاطع و مماسی که از M رسم کنیم، حاصل ضرب اندازه های قطعه ها با مربع اندازه مماس برابر است.

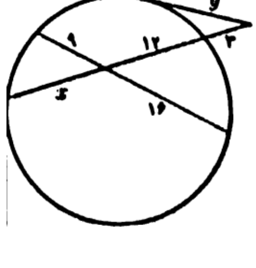
یعنی $MT^2 = MA.MB = MC.MD = ME.MF = ...$

از طرفی چون $MT^2 = d^2 - R^2$ که در آن OM = d است. پس همه این حاصلضرب ها مقدار ثابت $d^2 - R^2$ را دارند. (این مقدار ثابت به فاصله M تا مرکز دایره بستگی دارد.)

مثال 12 : نقطه P به فاصله 5 واحد از مرکز دایره ای به شعاع 3 واحد قرار گرفته است. طول قطعه مماسی که از نقطه P بر دایره رسم می شود چقدر است؟

1) $2\sqrt{3}$
2) 4
3) $3\sqrt{2}$
4) 6

مثال 13 : در شکل مقادیر x و y را بیابید.



مسئله 3 : از نقطه M بیرون دایره $C(O,R)$ مماس های MT و MT' را بر دایره رسم میکنیم. ثابت کنید: (H محل برخورد OM و TT' است)

الف) $MT = MT'$

ب) OM نیمساز زاویه بین دو مماس و زاویه TOT' است.

ج) OM عمود منصف پاره خط TT' است.

د) $OH.OM = R^2$

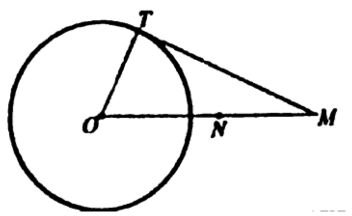
ه) $TT'^2 = 4OH.HM$

و) $TT'.OM = 2R.MT$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

برای رسم مماس ابتدا به مسئله زیر توجه میکنیم:

مسئله 4 : از نقطه M بیرون دایره به مرکز O مماس MT را رسم کرده و از M به O وصل می‌کنیم. اگر N وسط OM باشد. ثابت کنید دایره به مرکز N و قطر OM از T می گذرد.



برای رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره $C(O,R)$ ابتدا دایره‌ای به قطر OM رسم می کنیم. این دایره در نقاط T و T’ دایره C را قطع می‌کند.

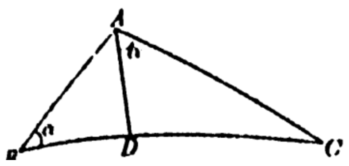
حال با توجه به مسئله قبل پاره خط های MT و MT’ بر دایره مماس اند. (T و T’ باید روی هر دو دایره باشند)

بدون در نظر گرفتن مسئله هم اینگونه می توان اثبات کرد که زوایای OTM و OT’M رو به قطر OM هستند و 90 درجه هستند. پس MT و MT’ در نقاط T و T’ به شعاع های OT و OT’ عمودند یعنی بر دایره به مرکز O مماس اند.

نتیجه: از هر نقطه بیرون دایره، دقیقا دو مماس بر دایره می توان رسم نمود و $MT=\sqrt{d^2-R^2}$

مسئله 5 : AB و نقطه M روی امتداد آن مفروض اند. اگر نقطه T بیرون خط شامل AB طوری باشد که $MT^2=MA.MB$ آنگاه ثابت کنید MT بر دایره گذرنده از A ، B و T مماس است.

مثال 14 : در شکل نقطه D روی BC طوری قرار دارد که $\hat{B}=D\hat{A}C$ ثابت کنید AC بر دایره ای که از B ، A و D می گذرد مماس است.



مثال 15 : مجموعه تمام نقاطی را بیابید که اندازه مماس های رسم شده از آنها بر دایره $C(O,R)$ برابر R باشد.

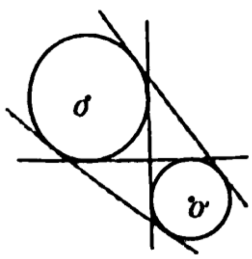
توجه: در مثال فوق نقطه M به گونه‌ای است که دایره را با زاویه قائمه می بیند زیرا $T\hat{M}T'=90°$

مثال 16 : نقاط M و O مفروض اند، دایره‌ای به مرکز O رسم کنید که طول مماس رسم شده از نقطه M بر این دایره برابر شعاع دایره باشد.

حالت های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک ها

مماس مشترک دو دایره: اگر دو دایره در صفحه مفروض باشند و خطی بتوانیم چنان رسم کنیم که بر هر دو دایره مماس باشد، آن خط را مماس مشترک آن دو دایره می گوییم. (مانند خطوطی که در شکل مشاهده می کنید)

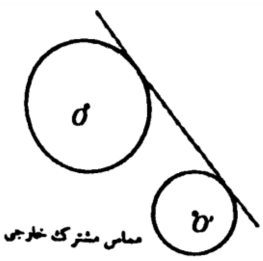
با توجه به حالت های مختلف دو دایره تعداد این مماس مشترک ها متغیر است.

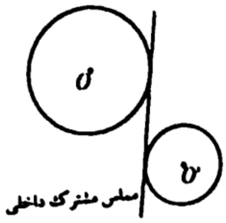


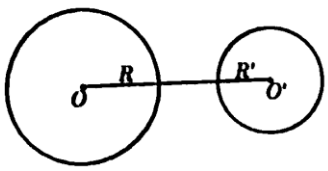
اگر مراکز هر دو دایره در یک طرف مماس مشترک باشند آن را مماس مشترک خارجی و اگر مراکز دایره ها در دو طرف مماس مشترک باشند آن را مماس مشترک خارجی می نامیم.

خط المرکزین دو دایره: پاره خطی است که دو سر آن مراکز دو دایره است.

(مانند پاره خط OO' در شکل)







وضعیت دو دایره

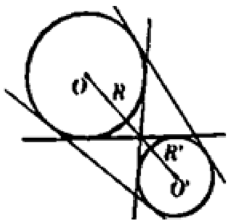
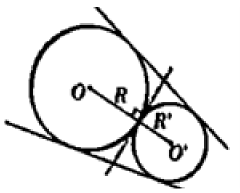
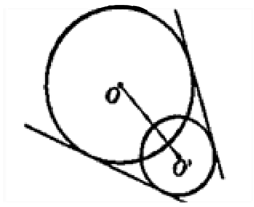
دو دایره متخارج : دو دایره متخارج اند هرگاه تمام نقاط یکی بیرون دیگری باشد.

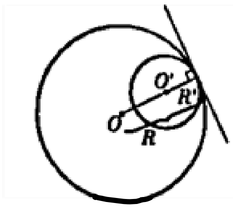
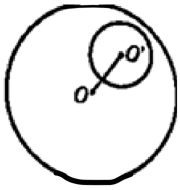
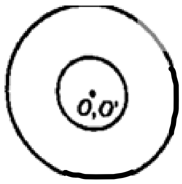
دو دایره مماس : دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو دایره مماس است. اگر مرکز های دو دایره در دو طرف این مماس باشد آن دو دایره را مماس برونی و اگر هر دو مرکز در یک طرف باشند آنها را مماس درونی می نامند.

دو دایره متقاطع : دو دایره را که فقط دو نقطه مشترک داشته باشند متقاطع می نامند.

دو دایره متداخل : دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد متداخل می نامیم.

در جدول زیر حالت های دو دایره نسبت به هم و نیز تعداد مماس مشترک های آنها و همچنین رابطه بین خط المرکزین و شعاع های آنها آمده است. دو دایره $C(O,R)$، $C'(O',R')$ را در نظر می‌گیریم.

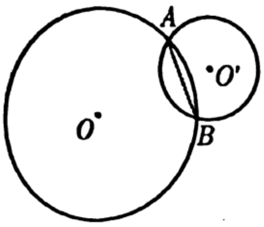
حالت های دو دایره	شکل	رابطه	تعداد مماس مشترک های خارجی	تعداد مماس مشترک های داخلی
برون هم (متخارج)		$OO' > R+R'$	2	2
مماس برون		$OO' = R+R'$	2	1
متقاطع		$\lvert R+R' \rvert < OO' < R+R'$	2	0

0	1	$OO' = \|R+R'\|$		مماس درون
0	0	$OO' < \|R+R'\|$		متداخل
0	0	$OO' = 0$		هم مرکز

مثال 17 : دو دایره $C'(O',4), C(O,3)$ با فرض $OO' = 6$ مفروض اند این دو دایره چند مماس مشترک دارند؟

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

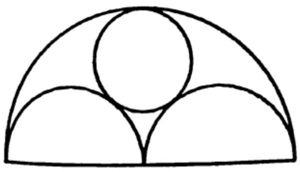
مثال 18 : دو دایره $C_2(O',3), C_1(O,5)$ متخارج هستند چند خط می توان رسم نمود که در دو دایره وتر هایی به طول 2 ایجاد شود.



وتر مشترک دو دایره متقاطع: اگر دو دایره، در نقاط A و B یکدیگر را قطع کنند پاره خط AB را وتر مشترک آن دو دایره می گوییم. (مانند پاره خط AB در شکل مقابل) بنابراین، دو سر وتر مشترک روی هر دو دایره است.

مسئله 6 : ثابت کنید خط المرکزین دو دایره متقاطع، عمود منصف وتر مشترک آنهاست.

مثال 19 : در شکل مقابل اگر R شعاع بزرگترین نیم دایره و r شعاع کوچکترین دایره باشد (دایره و نیم دایره ها دو به دو بر هم مماس اند) آنگاه نسبت $\frac{R}{r}$ کدام است؟



1) 2
2) 3
3) 4
4) 5

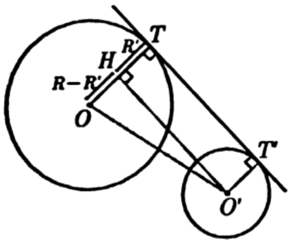
مسئله 7 : در دو دایره متقاطع $C'(O',R'),C(O,R)$ ثابت کنید : $|R+R'| < OO' < R+R'$

نکته 4 : طول مماس مشترک خارجی دو دایره $C'(O',R'),C(O,R)$ که $OO'=d$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

اثبات:

مراکز دو دایره را مطابق شکل به نقاط تماس وصل می کنیم و از O' عمود $O'H$ را بر OT وارد می‌کنیم.
واضح است که: $O'T'=HT, TT'=O'H$ (زیرا چهار ضلعی $T'THO'$ سه زاویه قائمه دارد، پس زاویه چهارم آن نیز قائمه بوده و مستطیل است.)



حال با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$ داریم:

$$O'H=\sqrt{OO'^2-(OH)^2}=\sqrt{d^2-(OH-O'T')}=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

مثال 20 : در دو دایره $C'(O',R'),C(O,R)$ طول مماس مشترک خارجی برابر کدام است؟

1) $R+R'$
2) $(R-R')$
3) OO'
4) $2OO'$

مثال 21 : طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر 7 است. اگر طول خط المرکزین این دو دایره برابر 9 باشد. آنگاه شعاع دایره بزرگتر چقدر از شعاع دایره کوچکتر بیشتر است؟

1) $3\sqrt{2}$
2) $4\sqrt{2}$
3) $3\sqrt{3}$
4) $4\sqrt{3}$

نکته 5 : طول مماس مشترک داخلی دو دایره $C'(O',R'),C(O,R)$ که $OO'=d$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

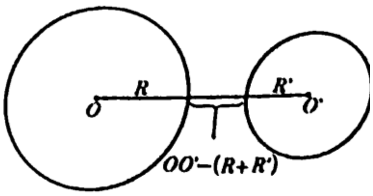
طول مماس مشترک داخلی $=\sqrt{d^2-(R+R')^2}$

اثبات: با توجه به شکل همانند اثبات طول مماس مشترک خارجی این موضوع را ثابت کنید.

مسئله 8 : مماس مشترک خارجی دو دایره $C'(O',R'),C(O,R)$ را رسم کنید.$(R>R')$

مثال 22 : دو دایره متخارج با شعاع های R و R' مفروض اند. اگر طول مماس مشترک خارجی آنها $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلیشان $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی 8 باشد آنگاه مطلوب است محاسبه طول شعاع های R وR' .

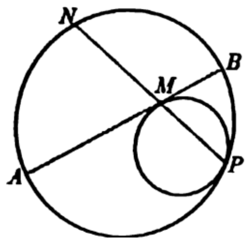
نکته 6 : کمترین فاصله نقاط دو دایره متخارج $C'(O',R'),C(O,R)$ و برابر است با: $OO'-(R+R')$



مثال 23 : اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های 2 و 9 برابر 24 است. اندازه کوچک ترین پاره خطی که دو سر آن بر روی هر یک از دو دایره باشد چقدر است؟

1) 13
2) 14
3) 15
4) 16

مسئله 9 : دو دایره در P مماس درون هستند و AB در نقطه M بر دایره کوچکتر مماس است. PM را امتداد میدهیم تا دایره بزرگتر را در N قطع کند. ثابت کنید $AN = BN$



مثال 24 : نقطه M را بر امتداد وتر مشترک دو دایره متقاطع اختیار می کنیم. از نقطه M دو مماس MT و MT’ را بر آن دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید: MT = MT’

مسئله 10 : دو دایره $C'(O',R'),C(O,R)$ در نقطه M مماس اند. ثابت کنید نقاط O ، O’ و M روی یک خط قرار دارند.

مسئله 11 : اگر دو دایره $C'(O',R'),C(O,R)$ متخارج، مماس خارج و یا متقاطع باشند ثابت کنید با شرط $R \neq R'$ مماس مشترک های خارجی روی خط المرکزین یکدیگر را قطع نموده و آن را به نسبت شعاع های دایره تقسیم می کنند.

مثال 25 : دو دایره با شعاع های 3 و 1 مماس خارج اند. زاویه بین مماس مشترک های خارجی آن دو را بیابید.

با توجه به مثال بالا در حالت کلی می‌توانیم نکته زیر را داشته باشیم.

نکته 7 : خط المرکزین نیمساز زاویه بین مماس مشترک های خارجی و داخلی است، همچنین اگر زاویه بین دو مماس مشترک خارجی را با آلفا و زاویه بین دو مماس مشترک داخلی را با بتا نشان دهیم داریم:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{|R-R'|}{d},\sin\frac{\beta}{2}=\frac{R+R'}{d}$$

مثال 26 : دو دایره با شعاع های 3 و 1 مماس خارج اند. فاصله نقطه برخورد مماس مشترک خارجی از دایره کوچکتر را بیابید.

مثال 27 : دو دایره $C'(O',R'),C(O,R)$ در نقطه A مماس خارج اند. مماس مشترک خارجی آنها را رسم میکنیم. اگر B و C نقاط تماس باشند، ثابت کنید مثلث BAC قائم الزاویه است.

نکته 8 :

در دو دایره مماس خارج $C'(O',R'),C(O,R)$ اندازه مماس مشترک خارجی برابر است با: $2\sqrt{RR'}$

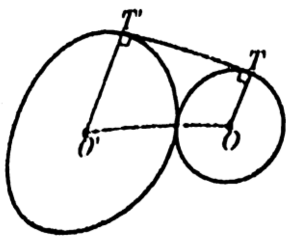
اثبات: در دو دایره خارج اندازه خط المرکزین برابر است با: $R+R'$

$$\text{اندازه مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2-(R-R')^2} = \sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2} = \sqrt{4RR'} = 2\sqrt{RR'}$$

مثال 28 : دو دایره به شعاع های 2 و 3 مماس هستند. اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟

1) 1
2) $3\sqrt{2}$
3) $\sqrt{6}$
4) $2\sqrt{6}$

مثال 29 : دو دایره مماس خارج $C'(O',8),C(O,6)$ مفروض اند و TT' مماس مشترک خارجی آنها است. محیط چهار ضلعی $OTT'O'$ کدام است؟



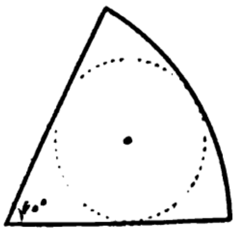
1) $28+52\sqrt{3}$
2) $28+54\sqrt{3}$
3) $28+8\sqrt{3}$
4) $28+60\sqrt{3}$

نکته 9 : در دو دایره متخارج همواره طول مماس مشترک خارجی بزرگتر از طول مماس مشترک داخلی آنها است.

مثال 30 : دو دایره به شعاع 5 واحد متخارج اند اگر طول مماس مشترک کوچکتر آنها $4\sqrt{6}$ باشد، طول خط المرکزین کدام است؟

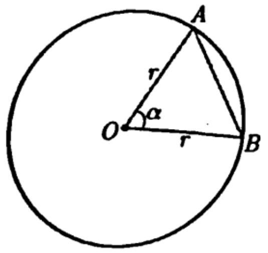
1) 12
2) 15
3) 14
4) 11

مثال 31 : در شکل مقابل، شعاع قطاع 60 درجه برابر R است. دایره ای چنان رسم شده است که بر هر دو شعاع و کمان مماس است. شعاع دایره کدام است؟

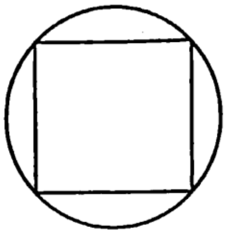


1) $\frac{R}{2}$
2) $\frac{R}{3}$
3) $\frac{R}{4}$
4) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

مسئله 12 : با توجه به شکل در دایره $C(O,r)$ مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام دارد.



مثال 32 : در شکل مقابل، مربعی در دایره به شعاع R محاط شده است. مجموع مساحت های رنگی بر حسب R چقدر است؟



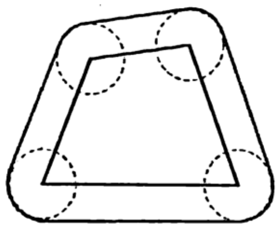
1) $R^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

2) $\frac{\pi R^2}{4}-\frac{R^2}{2}$

3) $\frac{\pi R^2}{4}$

4) $R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

نکته 10 : اگر به مرکز هر راس از یک n ضلعی، دایره ای به شعاع R رسم کنیم و به کمک یک نخ، این دایره ها را به هم ببندیم، طول نخ به صورت زیر به دست می آید:



(محیط دایره به شعاع R) + (محیط n ضلعی) = طول نخ

مثال 33 : با توجه به شکل سه دایره به شعاع 3 به مرکز راس های مثلث قائم الزاویه ABC رسم شده است. طول نخی که این سه دایره را به هم می بندد چقدر است؟

1) $6(4+\pi)$

2) $8(3+\pi)$

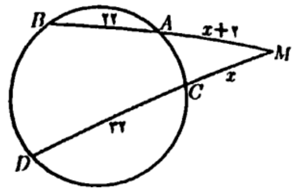
3) $3(4+2\pi)$

4) $4(6+3\pi)$

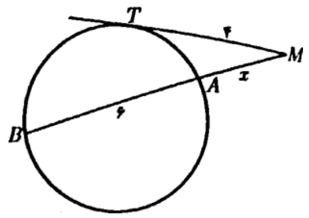
مسائل نمونه فصل اول – درس دوم

1. با توجه به شکل مقادیر x و y را بیابید.

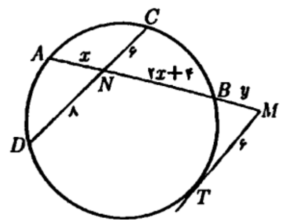
الف)



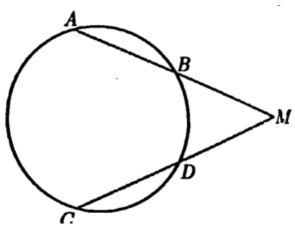
ب)



ج)

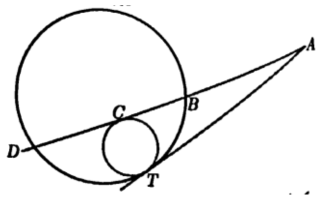


2. با توجه به شکل اگر $MB = MD$ باشد ثابت کنید: $BA = CD$



3. با توجه به شکل، دو دایره در نقطه T مماس داخل هستند و AC بر دایره کوچکتر مماس است.

ثابت کنید: $CD=\frac{BC^2}{AB}+BC$



4. در هر یک از حالت های زیر تعداد مماس های مشترک داخلی و خارجی را بیابید.

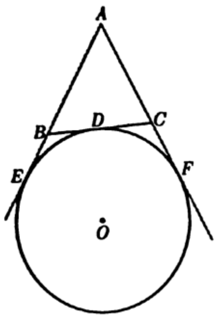
الف) $R=\sqrt{2}$ $\quad R'=\sqrt{8}$ $\quad d=\sqrt{18}$

ب) $R=\sqrt{8}$ $\quad R'=\sqrt{6}$ $\quad d=\frac{1}{2}$

5. دایره $C(O,6)$ و نقطه M به فاصله 12 سانتی متر از O را در نظر بگیرید از M مماس های MT',MT را بر این دایره رسم می کنیم. اندازه های TT',MT',MT را بیابید.

6. دایره $C(O,6)$ و نقطه M به فاصله $6\sqrt{2}$ از O داده شده اند. MT',MT در نقاط T,T بر این دایره مماس هستند. نوع چهار ضلعی $OTMT'$ را مشخص کنید.

7. خط های AE ، AF و BC به ترتیب در نقطه E ، F و D بر دایره (O) مماس هستند. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه D روی دایره، بین دو نقطه ثابت E و F محیط مثلث ABC ثابت می ماند.

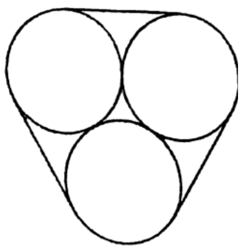


8. از نقطه P بیرون دایره ای به شعاع 6 قاطعی بر دایره رسم کنید که وتری به اندازه 8 در آن ایجاد کند.

9. دو دایره C و C′ در نقاط A و B متقاطع اند به طوری که O مرکز دایره C روی دایره C′ قرار دارد. نقطه D روی C طوری قرار دارد که امتداد AD دایره C′ را در E قطع می‌کند از O عمود OH را در AE رسم میکنیم و امتداد می دهیم تا C′ را در F قطع کند (H بین O و F قرار دارد) ثابت کنید FD بر OE عمود است.

10.دو دایره O و 'O مفروض اند. قاطعی رسم کنید که دو دایره را قطع کند و در آن ها وترهایی به طول های معلوم l',l ایجاد نماید.

11.سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو بر هم مماس اند. مطابق شکل این سه دایره به وسیله نخی بسته شده‌اند نشان دهید طول این نخ برابر $6r+2\pi r$ است. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ است.



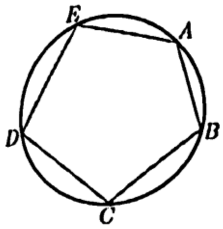
درس سوم

(چند ضلعی های محاطی و محیطی)

یکی از مباحث بسیار مهم و کلیدی در مبحث دایره، چند ضلعی های محاطی و محیطی است که بیشتر مطالب این درس مربوط به این موارد هستند.

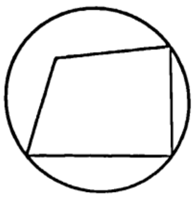
چند ضلعی محاطی

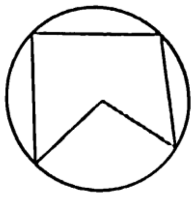
چند ضلعی را محاطی گوییم اگر و فقط اگر دایره ای وجود داشته باشد که از همه رئوس آن بگذرد. در این صورت دایره را دایره محیطی آن چند ضلعی می نامیم. به عبارتی به دایره گذرنده از همه رئوس یک چند ضلعی محاطی، دایره محیطی آن می گوییم.



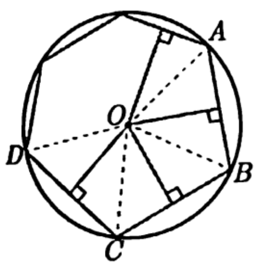
مثلاً در شکل مقابل ABCDE یک پنج ضلعی محاطی است.

و به عنوان مثال چند ضلعی های زیر محاطی نیستند.





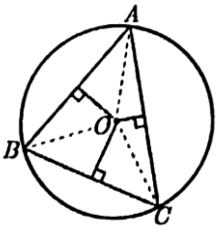
نکته 1 : یک چند ضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف های همه اضلاع آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.



اثبات: ابتدا فرض کنید تمام رئوس چند ضلعی ...ABCD روی یک دایره باشند. پس مرکز این دایره از دو سر هر ضلع آن به یک فاصله است پس این مرکز روی عمود منصف هر ضلع قرار دارد. (برای آنکه دایره ای از دو نقطه بگذرد باید مرکز آن روی عمود منصف پاره خطی باشد که آن دو نقطه دو سر آن باشد.) یعنی عمود منصف های همه اضلاع همرس اند.

حال فرض کنید در چند ضلعی ...ABCD عمود منصف های تمام اضلاع در نقطه O همرس باشند پس نقطه O تنها نقطه‌ای است که از همه رئوس این چند ضلعی به یک فاصله خواهد شد، (هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.) یعنی اگر به مرکز O و به شعاع مثلاً OA

دایره‌ای رسم کنیم، این دایره حتما از تمام رئوس خواهد گذشت یعنی چند ضلعی ...ABCD محاطی است. نقطه O مرکز دایره محیطی چند ضلعی است و در صورت وجود یکتاست.



$OA=OB=OC=R$

نکته 2 : می دانیم در هر مثلث عمود منصف های اضلاع همرس اند پس هر مثلث یک چند ضلعی محاطی است. مرکز دایره محیطی مثلث، محل برخورد عمود منصف های اضلاع است.

مسئله 1 : اگر a ، b و c طول اضلاع مثلث ABC و R شعاع دایره محیطی آن و s مساحت آن باشد، ثابت کنید: $R=\frac{abc}{4s}$

مسئله 2 : ثابت کنید شعاع دایره محیطی مثلث قائم الزاویه ABC به طول وتر a برابر با $R=\frac{a}{2}$ است.

مثال 1 : در مثلث ABC به اضلاع AB = 24 و AC = 7 و BC = 25 شعاع دایره محیطی آن برابر کدام است؟

1) 6
2) 12
3) 12.5
4) 6.5

مثال 2 : در مثلثی به طول اضلاع 5 ، 5 و 8 ، اندازه شعاع دایره محیطی را به دست آورید.

مسئله 3 : مثلث ABC و دایره محیطی آن را رسم میکنیم. اگر نیمساز داخلی زاویه A ، ضلع BC را در D و دایره محیطی را در E قطع کند اولاً: ثابت کنید دو مثلث ABD و AEC متشابه اند. ثانیا: با نوشتن نسبت های تشابه و استفاده از روابط طولی رابطه زیر را نتیجه بگیرید: $AD^2 = AB\times AC - BD\times DC$

مثال 3 : در مثلث ABC اندازه نیمساز زاویه داخلی A میانگین هندسی بین اندازه دو ضلع مجاورش است کدام گزینه درست است؟

1) $\hat{A}=90^\circ$
2) $\hat{A}<90^\circ$
3) $\hat{A}>90^\circ$
4) فرض غلط است.

مسئله 4 : ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.

مثال 4 : در مثلث ABC با $BC = 8$ و $R = 5$ نیمساز A و عمود منصف BC در نقطه M متقاطع اند طول BM کدام است؟

1) 3
2) $2\sqrt{5}$
3) 4
4) $3\sqrt{2}$

مثال 5 : مثلثی رسم کنید که اندازه ارتفاع، میانه و نیمساز داخلی نظیر یک راس آن معلوم باشند.

مثال 6 : مثلث ABC را با معلومات AB ، AC و R رسم کنید. (R شعاع دایره محیطی است)

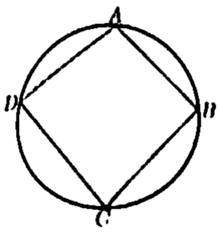
چهار ضلعی محاطی:

یکی از چند ضلعی های محاطی که در هندسه اهمیت ویژه‌ای دارد، «چهار ضلعی محاطی» است. برخلاف مثلث که همواره محاطی است. همه چند ضلعی های دیگر لزوما محاطی نیستند.

در چهارضلعی محاطی علاوه بر همرسی عمود منصف ها خاصیت مهم زیر برقرار است.

قضیه 1 : یک چهار ضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

اثبات قضیه : فرض کنیم چهار ضلعی ABCD محاطی باشد، مجموع اندازه های $\hat{A}$ و $\hat{C}$ نصف مجموع اندازه های کمان های DCB و DAB است.



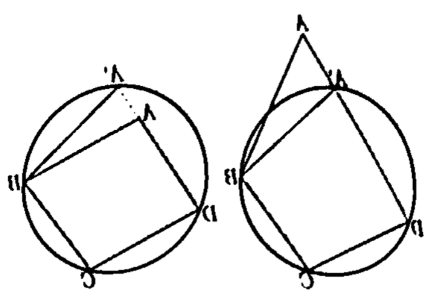
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\frac{1}{2}DCB\\ \hat{C}=\frac{1}{2}DAB\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=\frac{1}{2}\left(DCB+DAB\right)$$

مجموع اندازه های این دو کمان 360 درجه است. در نتیجه:

$$\hat{A}+\hat{C}=\frac{1}{2}\left(360°\right)=180°$$

پس $\hat{D},\hat{B}$ هم مکمل یکدیگرند.

اثبات عکس قضیه: فرض کنیم $\hat{C},\hat{A}$ مکمل باشند، با برهان خلف ثابت می کنیم چهار ضلعی ABCD محاطی است. از سه نقطه B ، C و D همواره یک دایره می گذرد، زیرا نقاط B ، D و C روی یک خط راست نیستند. (تشکیل مثلث می‌دهند)

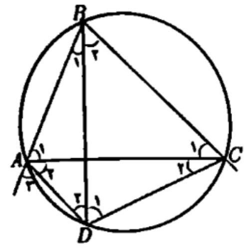


اگر این دایره از A نگذرد خط AD را در نقطه دیگری مانند A' قطع میکند که A' بین A و D یا A بین A' و D است.
اکنون چهار ضلعی $A'BCD$ محاطی است پس $B\hat{A}'D,\hat{C}$ مکمل اند در نتیجه باید $B\hat{A}'D,\hat{A}$ هم اندازه باشند و این ممکن نیست (چون زاویه خارجی در یک مثلث از زاویه داخلی غیر مجاورش بزرگتر است.) پس A همان A' است.

در چهارضلعی محاطی ABCD شرایط زیر برقرار است.

1) زوایای روبرو مکمل اند $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180°$
2) هر زاویه داخلی چهارضلعی با زاویه خارجی نظیر راس روبروی آن برابر است $\hat{C}=\hat{A}_3$

3) زاویه ای که قطرها با دو ضلع روبرو می سازند برابر است.



$\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$

$\hat{B}_1 = \hat{C}_2$ $\hat{D}_2 = \hat{C}_1$

مثال 7 : نقطه A وسط کمان BC از یک دایره مفروض است. از نقطه A دو وتر دلخواه AE و AF را رسم میکنیم تا وتر BC را به ترتیب در نقاط M و N قطع کنند. ثابت کنید چهار ضلعی MEFN محاطی است.

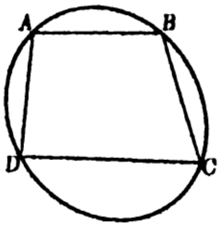
مثال 8 : از تلاقی نیمسازهای زوایای داخلی ذوزنقه ای یک چهار ضلعی ایجاد شده است. این چهار ضلعی همواره کدام است؟

1) مربع
2) محاطی
3) مستطیل
4) لوزی

مثال 9 : در مثلث ABC محل تلاقی نیمسازهای داخلی را I و محل تلاقی نیمساز های خارجی $\hat{C},\hat{B}$ را I' می نامیم. اگر M وسط پاره خط II' باشد، ثابت کنید: چهار ضلعی ABMC محاطی است.

نکته 3 : شرط لازم و کافی برای آن که ذوزنقه‌ای محاطی باشد، آن است که متساوی الساقین باشد.

اثبات: ابتدا فرض کنید چهار ضلعی ABCD یک ذوزنقه محاطی با قاعده های AB و CD باشد پس:



$$\hat{A}+\hat{C}=180^\circ \qquad (1)$$

از طرفی در ذوزنقه داریم:

$$\hat{A}+\hat{D}=180^\circ \qquad (2)$$

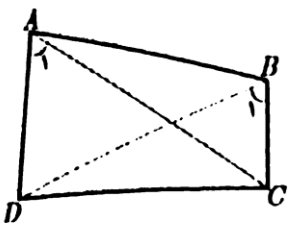
$$(1),(2)\Rightarrow \hat{C}=\hat{D}\Rightarrow AD=BC$$

حال فرض کنید ABCD یک ذوزنقه متساوی الساقین با قاعده های AB و CD باشد و AD = BC پس: $\hat{C}=\hat{D}$ از طرفی می دانیم $\hat{A}+\hat{D}=180^\circ$ در نتیجه $\hat{A}+\hat{C}=180^\circ$ پس طبق قضیه (1) این ذوزنقه محاطی است.

مثال 10 : چه تعداد از چهارضلعی های زیر همواره محاطی هستند؟

مستطیل – متوازی الاضلاع – لوزی – مربع – ذوزنقه متساوی الساقین – کایت

1) 2
2) 3
3) 4
4) 5



نکته 5 : اگر در یک چهار ضلعی قطر ها را رسم کنیم و دو زاویه ای که قطرها با دو ضلع روبرو می سازند با هم برابر باشند، آنگاه آن چهار ضلعی حتما محاطی است. به عبارت دیگر در شکل مقابل $\hat{A}_1=\hat{B}_1$ آنگاه ABCD محاطی است.

اثبات: این نکته را با برهان خلف می توان اثبات کرد.

مثال 11 : در مثلث ABC ، پاره خط های AA′ ، BB′ و CC′ سه ارتفاع و H مرکز ارتفاعی است.

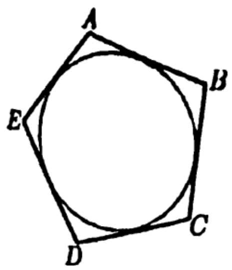
الف) چهار ضلعی های محاطی را مشخص کنید.

ب) ثابت کنید ارتفاع های مثلث ABC نیمساز های مثلث A′B′C′ هستند.

ج) با معلوم بودن پای سه ارتفاع از مثلث آن را رسم کنید.

چند ضلعی محیطی

چند ضلعی را محیطی گوییم اگر و فقط اگر دایره ای وجود داشته باشد که بر همه ضلع های آن مماس باشد. در این صورت دایره را دایره محاطی این چند ضلعی می نامیم.

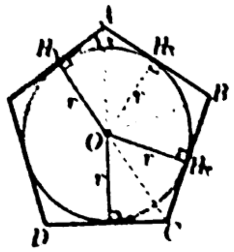


به عبارت دیگر به دایره ای که به همه اضلاع چند ضلعی محیطی مماس باشد **دایره محاطی** آن می گوییم.

نکته 5 : یک چند ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمساز های زاویه های آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است. (در یک n ضلعی اگر n-1 تا از نیمساز ها همرس باشند. n ضلعی محیطی است و نیمساز راس n هم حتما از محل همرسی می‌گذرد.)

اثبات: ابتدا فرض کنید چند ضلعی ...ABCDE محیطی باشد. شعاع دایره در نقاط تماس بر اضلاع عمود است.

$$\left.\begin{array}{l} OH_1 = OH_2 = r \\ OA \quad \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OH_1A} \cong \overset{\Delta}{OH_2A} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$



یعنی OA نیمساز زاویه A است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که OB ، OC و... نیز نیمساز زاویه ها هستند. پس همه نیمساز ها در نقطه O همرسند. یعنی مرکز دایره محاطی محل برخورد نیمساز های چند ضلعی است و یکتاست. حال فرض کنید در چند ضلعی ...ABCD نیمساز های همه زاویه ها در نقطه O همرس باشند، از O بر اضلاع عمود رسم می‌کنیم.

(O روی نیمساز آب است). $OH_1 = OH_2$

با همین استدلال داریم: $OH_2 = OH_3$ و بنابراین $OH_1 = OH_2 = OH_3 = \ldots$

یعنی اگر به مرکز O و به شعاع OH_1 دایره‌ای رسم کنیم بر همه اضلاع چند ضلعی ...ABCD مماس خواهد بود و دایره محاطی آن خواهد بود.

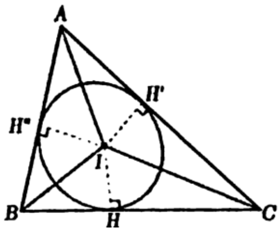
مسئله 5 : اگر در یک چند ضلعی محیطی با مساحت s و محیط 2p ، شعاع دایره محاطی برابر r باشد، ثابت کنید: s = rp

مثال 12 : اگر شعاع دایره محاطی یک لوزی برابر 2 و یکی از قطر های لوزی 8 باشد، مساحت لوزی چقدر است؟

1) 32
2) $\frac{32}{\sqrt{2}}$
3) $\frac{32}{\sqrt{3}}$
4) $\frac{35}{\sqrt{5}}$

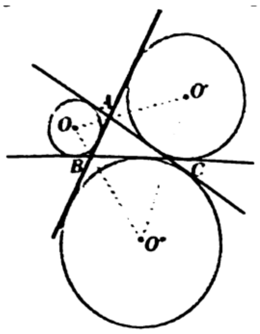
نکته 6 : چون در هر مثلث نیمساز های داخلی زاویه ها در نقطه ای درون مثلث همرس اند هر مثلث محیطی است. مرکز دایره محاطی مثلث محل همرسی سه نیمساز است.

$IH = IH' = IH'' = r$



برای رسم دایره محاطی مثلث ابتدا نیمسازهای زاویه ها را رسم میکنیم تا مرکز این دایره که معمولاً با I نشان می‌دهیم مشخص شود. از I بر یکی از اضلاع عمود رسم می کنیم. اندازه این عمود همان شعاع این دایره است. و سپس به مرکز I و شعاع عمود گفته شده دایره را رسم می‌کنیم. این دایره را دایره محاطی داخلی مثلث گوییم. معمولاً شعاع آن را با r نشان می دهیم و بنا بر آنچه در مورد n ضلعی های محیطی نشان دادیم، داریم: $r = \frac{s}{p}$

نکته 7 : در هر مثلث محل برخورد نیمسازهای خارجی نظیر دو راس، از اضلاع به یک فاصله است پس روی نیمساز داخلی نظیر راس سوم قرار دارد. بنابراین دایره ای می توان رسم کرد که مرکز آن محل تلاقی این نیمساز ها بوده و بر یک ضلع و خط های شامل دو ضلع دیگر مثلث مماس باشد. این دایره را دایره محاطی خارجی مثلث گویند. با توجه به شکل ملاحظه می کنید که هر مثلث دارای سه دایره محاطی خارجی است.



نتیجه: در صفحه مثلث 4 نقطه وجود دارد که از اضلاع یا امتداد اضلاع مثلث فاصله های یکسان دارند. که همان مرکز دایره های محاطی داخلی و خارجی آن هستند.

مسئله 6 : اگر r_a شعاع دایره محاطی خارجی روبه‌روی راس A و s مساحت و p نصف محیط و a طول ضلع BC از مثلث ABC باشد، ثابت کنید: $s = r_a\left(p-a\right)$ یا $r_a = \frac{s}{p-a}$

مسئله 7 : اگر r شعاع دایره محاطی داخلی و r_c, r_b, r_a شعاع های دایره های محاطی خارجی مثلث ABC باشند ثابت کنید :

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$$

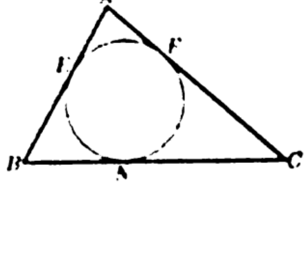
تمرین: ثابت کنید در مثلث ABC رابطه زیر بین شعاع دایره محاطی داخلی و سه ارتفاع برقرار است:

راهنمایی: فرمول مساحت را برای هر سه ارتفاع بنویسید.

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

مثال 13 : در مثلث ABC دایره محاطی داخلی در نقاط M ، N و E بر سه ضلع مثلث مماس است. اگر BC = 8 و AC = 7 و AB = 9 باشد، آنگاه طول BE برابر کدام است؟

مسئله 8 : اگر دایره محاطی داخلی مثلث ABC بر ضلع AB در نقطه E مماس باشد، ثابت کنید: AE = p-a که در آن p نصف محیط مثلث و a اندازه ضلع BC است.



مسئله 9 : دایره محاطی خارجی روبرو به راس A در نقطه D بر ضلع BC و همچنین در نقاط E و F بر امتداد های اضلاع AB و AC مماس است. اگر p نصف محیط مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

الف) $AE = AF = p$ ب) $CD = p - b, BD = p - c$

مثال 14 : در مثلث ABC ، دایره محاطی داخلی در نقطه D بر ضلع BC مماس است و همچنین دایره محاطی خارجی رو به روی راس A در نقطه D’ بر BC مماس است. ثابت کنید: $DD' = |b - c|$

مسئله 10 : در مثلث متساوی الاضلاع ABC که اندازه ارتفاع آن h است ثابت کنید:

$$r_a = h, r = \frac{h}{3}, R = \frac{2}{3}h$$

مثال 15 : در مثلث قائم الزاویه به وتر a اگر p نصف محیط و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، ثابت کنید: r = p - a

مثال 16 : در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\sqrt{12}$ طول خط المرکزین دایره های محیطی و محاطی خارجی را به دست آورید.

مثال 17 : مثلث به اضلاع AB = 6 ، AC = 7 و BC = 9 محیط بر یک دایره است. طول قطعه مماس مرسوم از A بر این دایره چقدر است؟

1) 2
2) 3
3) 4
4) 5

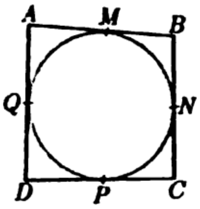
برخلاف مثلث که همواره محیطی است همه چند ضلعی های دیگر لزوما محیطی نیستند.

چهار ضلعی محیطی

در چهار ضلعی محیطی علاوه بر همرسی نیمسازهای داخلی و $r = \frac{s}{p}$ خاصیت مهم زیر برقرار است.

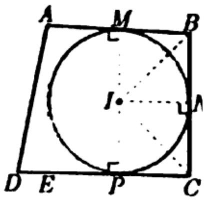
قضیه 2 : یک چهار ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل دیگر باشند.

اثبات: فرض کنیم چهار ضلعی ABCD محیطی باشد می دانیم که دو مماس رسم شده از یک نقطه بیرون دایره بر دایره دارای اندازه های یکسان هستند.



$$\left.\begin{array}{l} AB+CD=AM+BM+CP+DP \\ AM=AQ, BM=BN, CP=CN, DP=DQ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} AB+CD=AQ+BN+CN+DQ \\ \qquad =AD+BC \end{array}$$

حال فرض کنید در چهار ضلعی ABCD بین اضلاع رابطه‌ی $AB+CD=BC+AD$ برقرار باشد.



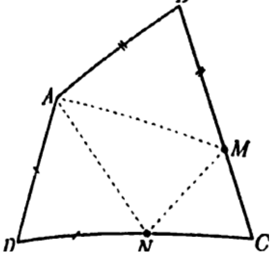
نیمسازهای دو زاویه B و C همدیگر را در نقطه ای مانند I قطع می کنند. با توجه به ویژگی نیمساز (هر نقطه روی نیمساز یک زاویه باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است)، نقطه ای از سه ضلع CD ، BC و AB به یک فاصله است. $(IM=IN=IP)$ دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM رسم می‌کنیم. این دایره بر اضلاع CD ، BC و AB مماس است. حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد حکم ثابت شده است. اگر این دایره بر AD مماس نباشد از A مماسی بر دایره رسم میکنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند (این مماس چرا CD را قطع میکند؟) در این صورت E بین P و D یا D بین E و P واقع می شود پس طبق قسمت (1) داریم $AB+EC=AE+BC$ (ABCE محاطی است) حال رابطه اخیر و فرض سوال را باهم مقایسه میکنیم:

$$\left.\begin{array}{l} AB+EC=AE+BC \\ AB+CD=BC+AD \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} CD-EC=AD-AE \Rightarrow DE=AD-AE$$

و این خلاف نامساوی مثلثی است. پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است (اگر D بین E و P باشد $DE=AE-AD$ است که مانند قبل تناقض است).

برای اثبات عکس قضیه میتوانیم به صورت زیر عمل کنیم.

مطابق شکل روی اضلاع BC و CD به اندازه AB و AD جدا میکنیم یعنی: $AB=BM, AD=DN$ ؛ طبق فرض $AB+CD=AD+BC \Rightarrow AB+CN+DN=AD+BM+CM \Rightarrow CN=CM$ پس مثلث های ABM ، CMN و ADN متساوی الساقین هستند در نتیجه نیمساز های B ، C و D عمود منصف های AM ، MN و AN هستند که همرسند. پس نقطه همرسی نیمسازهای B ، C و D از اضلاع چهار ضلعی به یک فاصله است و مرکز دایره مماس بر اضلاع (دایره محاطی) است.



توجه کنیم که بر اساس فرض، می توان نتیجه گرفت که دو ضلع روبرو در این چهار ضلعی نمی توانند بزرگترین ضلع ها باشند و حتماً دو ضلع بزرگتر، مجاورند و ما فرض کردیم CB و CD دو ضلع بزرگتر باشند.

$(CB, CD > AB, AD)$

مثال 18 : چه تعداد از چهار ضلعی های زیر همواره محیطی هستند؟

متوازی الاضلاع – مستطیل – لوزی – ذوزنقه متساوی الساقین – مربع

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

مثال 19 : ذوزنقه متساوی الساقین به قاعده های 8 و 18 واحد محیط بر دایره ای به شعاع R است. اندازه R کدام است؟

1) 5
2) 6
3) 6.5
4) 9

مسئله 11 : ثابت کنید در ذوزنقه متساوی الساقین محیطی، قطر دایره محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده است.

مثال 20 : سه نیمساز زوایای داخلی یک چهار ضلعی از یک نقطه می گذرند و اندازه سه ضلع متوالی آن به ترتیب 72 ، 107 و 91 است. اندازه ضلع چهارم آن کدام است؟

1) 56
2) 88
3) 90
4) 126

مثال 21 : ذوزنقه قائم الزاویه‌ای که زاویه 30 درجه نیز دارد بر دایره ای به شعاع R = 3 محیط است.
مساحت ذوزنقه را به دست آورید.

مثال 22 : در چهار ضلعی محیطی ABCD ، AB = 8 و CD = 12 است. اگر شعاع دایره محاطی این چهار ضلعی 4 باشد، مساحت چهار ضلعی را به دست آورید.

مثال 23 : یک ذوزنقه متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع R = 3 محیط است. اگر مساحت ذوزنقه 45 واحد مربع باشد، طول ساق آن کدام است؟

1) 7
2) 7.5
3) 8
4) 8.5

نکته 10 : در هر دو n ضلعی منتظم محاطی و محیطی بر یک دایره متشابه هستند بنابراین نسبت تشابه آنها برابر است با:

$$k = \frac{2r\sin\frac{180^\circ}{n}}{2r\tan\frac{180^\circ}{n}} = \cos\frac{180^\circ}{n}$$

پس نسبت مساحت های این دو ان ضلعی منتظم مساوی $\cos^2\frac{180^\circ}{n}$ است.

مثال 24 : یک شش ضلعی منتظم در دایره ای به شعاع r محاط و شش ضلعی منتظم دیگری بر همین دایره محیط است نسبت مساحت های این دو شش ضلعی را به دست آورید.

مثال 25 : مساحت یک 12 ضلعی منتظم که در دایره‌ای به شعاع 6 محاط است، را به دست آورید.

مثال 26 : مساحت مثلث متساوی الاضلاعی $27\sqrt{3}$ واحد مربع است. مساحت مربع محاط در دایره محاطی مثلث چقدر است؟

1) 16
2) 18
3) 27
4) 32