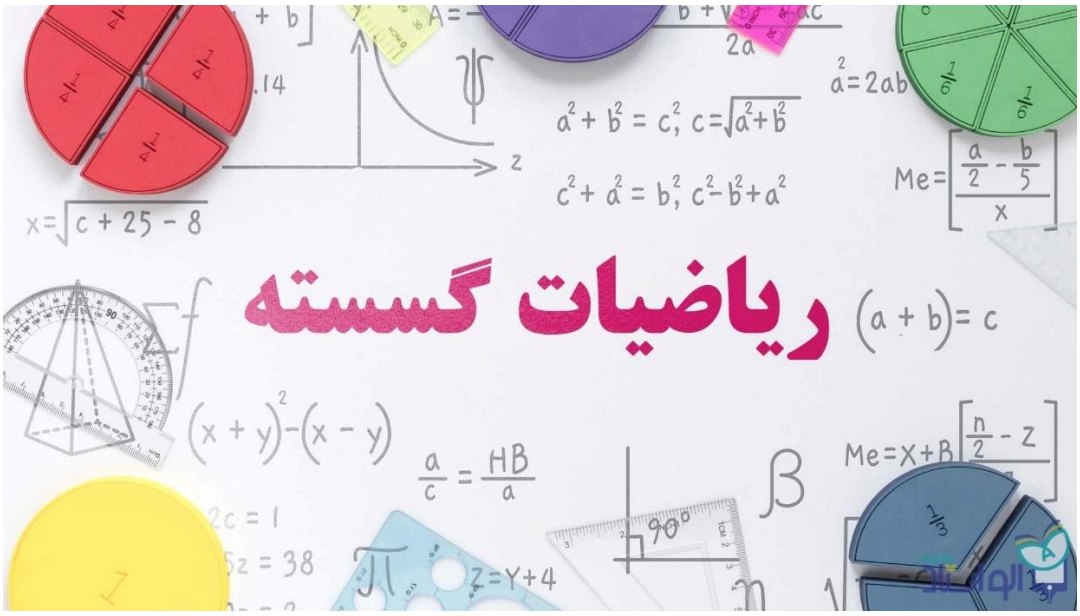
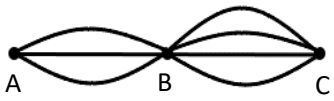


مبحث : آنالیز ترکیبی

مدرس : علیرضا مظاهری

اصل ضرب:

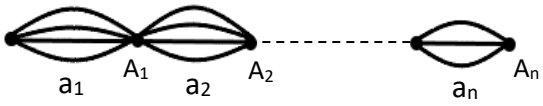
اگر بخواهیم از شهر A به شهر B و سپس از B به C برویم مانند شکل روبرو تعداد راه ها برابر است با:



$A \to B, B \to C$

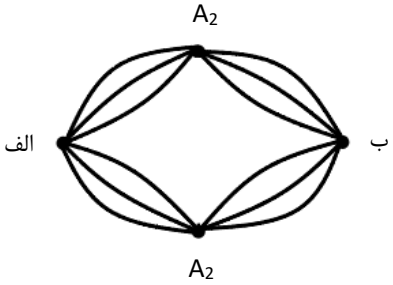
$3 \times 4 = 12$

تعمیم اصل ضرب: هرگاه برای انجام کار A مجبور باشیم کارهای $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ را انجام دهیم تعداد کل حالت های ممکن برابر است با:



$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots\ldots \times a_n$

اصل جمع: فرض کنید برای انجام عمل A مختار باشیم که آن را از طریق A_1 یا A_2 انجام دهیم که $n_1 : A_1$ طریق و $n_2 : A_2$ طریق قابل انجام باشد:



برای رفتن از الف به ب:

$$\left.\begin{matrix} A_1 : 3 \times 3 = 9 \\ A_2 : 3 \times 3 = 9 \end{matrix}\right\} + \; 9 + 9 = 18$$

نکته: هرگاه به حروف زیر رسیدیم اصل ضرب یا جمع را استفاده میکنیم:

و : اصل ضرب

یا : اصل جمع

تعریف فاکتوریل: حاصل ضرب اعداد طبیعی متوالی را فاکتوریل می نامیم:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times n$$

تعریف: $0! = 1! = 1$

مثال:

$$5! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5 = 120$$
$$3! = 1\times 2\times 3 = 6$$
$$4! = 1\times 2\times 3\times 4 = 24$$

نتیجه:

$$n! = (n-1)!\times n$$
$$n! = (n-2)!\times (n-1)!(n)$$

مثال: یک سکه و یک تاس را باهم پرتاب میکنیم تعداد تمام حالات را بیابید:

حل:

$$\underset{\text{تاس و سکه}}{6\times 2} = 12 \text{ حالت}$$

تست: تعداد اعداد 3 رقمی زوج با ارقام متمایز که همه آنها فاقد دو رقم 2 و 5 می‌باشند، کدام است ؟

1) 150
2) 125
3) 120
4) 115

حل: ابتدا رقم 2 و 5 را کنار میگذاریم:

$$0,1,\cancel{2},3,4,\cancel{5},6,7,8,9$$

الف) رقم یکان صفر باشد: $\underline{7}\ \underline{6}\ \underset{0}{\underline{1}}$

اصل ضرب $7\times 6\times 1 = 42$

ب) رقم یکان $4,6,8$ باشد: $\underset{\text{میتواند نیست}}{\underset{\text{صفر}}{\underline{6}}}\ \underset{\text{صفر}}{\underline{6}}\ \underset{4,6,8}{\underline{3}}$

اصل ضرب $6\times 6\times 3 = 108$

کل حالات مطلوب: $108 + 42 = 150$

تمرین 1: با ارقام 2و3و5و7و8و9 چند عدد 3 رقمی بدون تکرار رقم کوچکتر از 400 می توان نوشت؟

1) 35
2) 45
3) 40
4) 50

تمرین 2: در جعبه‌ای 3 گوی قرمز، 5 گوی سفید، 7 گوی آبی و 9 گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن باشیم دست‌کم 6 گوی خارج شده هم رنگ باشند؟

1) 17
2) 18
3) 19
4) 20

جایگشت: به هر یک از حالتهای قرار گرفتن n شی در کنار هم یک جایگشت می‌گوییم. تعداد جایگشت های n شی متمایز $n!$ است.

طبق اصل ضرب: $n\times(n-1)\times(n-2)\times....\times1=n!$

مثال: 5 اهوازی، 4 اصفهانی، 2 زاهدانی به چند طریق مختلف می توانند کنار هم قرار گیرند به شرط آن که هم شهری ها کنار هم باشند؟

حل: ابتدا 5 اهوازی را در یک دسته، 4 اصفهانی را در یک دسته و 2 زاهدانی را نیز در یک دسته قرار می دهیم، این 3 دسته به $3!$ سه طریق می توانند با هم جابجا شوند و داخل هر دسته از افراد می‌توانند به $5!$و $4!$و $2!$ مختلف با هم جابجا شوند. بنابر اصل ضرب کل جایگشت ها برابر است با:

$$3!\times5!\times4!\times2!$$

تمرین 4: چند عدد 3 رقمی با ارقام متمایز می توان ساخت به طوری که دارای یک رقم 2 بوده و فاقد دو رقم 7 و 8 باشد ؟

1) 114
2) 141
3) 144
4) 147

تمرین 4: مقدار $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ با کدام عدد برابر است؟

1) $n(n+1)$
2) $n(n-1)$
3) $\frac{n+1}{n-1}$
4) $\frac{n(n+1)}{2}$

تمرین 5: به چند طریق می توان 3 سرباز و 2 افسر را در یک ردیف نشاند، طوری که سرباز ها کنار هم و افسر ها کنار هم باشند؟

1) 72
2) 24
3) 18
4) 36

تمرین 6: 3 کتاب متمایز ریاضی و 4 کتاب متمایز ادبی را به چند طریق می توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتاب های ریاضی همواره کنار هم باشند؟

1) 180
2) 360
3) 560
4) 720

تمرین 7: شش نفر شامل علی و حسین قرار است در یک جلسه به ترتیب سخنرانی کنند. تعداد تمام حالاتی که حسین زودتر از علی سخنرانی می کند کدام است؟

1) 120
2) 240
3) 360
4) 480

جایگشت دوری: تعداد تمام حالاتی که n شی متمایز می توانند تشکیل دور یا حلقه دهند:

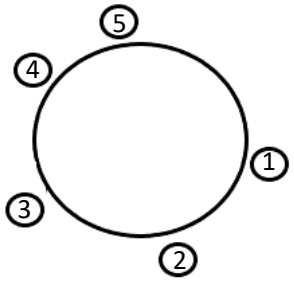
الف) اگر جهت قرار گرفتن شان در حلقه اهمیت داشته باشد: $(n-1)!$ است. (در مورد افراد)

ب) اگر جهت قرار گرفتن شان در حلقه اهمیت نداشته باشد: $\frac{(n-1)!}{2}$ است. (در مورد اشیا)

تبدیل با تکرار: تعداد جایگشت های n شی که از میان آنها k شی تکراری هستند برابر است با: $\frac{n!}{k!}$

مثال: به چند طریق می توان 5 نفر را دور میزگردی نشاند؟

1) 24
2) 10
3) 12
4) 30



حل: $(5-1)! = 4! = 24$

$\frac{5!}{5} = 4!$

تمرین 8: سه مرد و سه زن به چند طریق می توانند دور یک میز 6 نفره بنشینند به طوری که مردها کنار هم و زنان کنار هم باشند؟

1) 6
2) 18
3) 36
4) 72

تمرین 9: در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل 4 دانش آموز کلاس پایه یازدهم و 4 دانش آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش آموزان در صندلی ها بنشینند، به طوری که در کنار هر دانش آموزی، دانش آموز هم پایه قرار نگیرد؟ (سراسری تجربی-1400)

1) 144
2) 288
3) 276
4) 1152

تمرین 10: با شش مهره متفاوت چند دستبند میتوان ساخت که هر دستبند شامل هر شش مهره باشد ؟

1) 40
2) 60
3) 90
4) 120

تمرین 11: با استفاده از حروف کلمه ((اهواز)) چند کلمه 5 حرفی میتوان ساخت؟

1) 30
2) 40
3) 60
4) 120

تمرین 12: به چند طریق مختلف می توان 16 مهره سفید شطرنج را در یک ردیف کنار هم چید؟ (16 مهره شامل: 8 سرباز، 2 رخ، 2 فیل، 2 اسب، 1 شاه و 1 وزیر است)

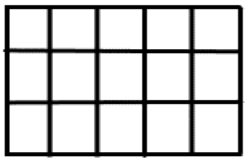
1) $16!$

2) $\frac{16!}{8!3!2!}$

3) $\frac{16!}{8!(2!)^3}$

4) $\frac{16!}{8!2!3!}$

تمرین 13: در شکل زیر به چند طریق می توان از نقطه A به نقطه B رفته مشروط بر آنکه حرکت روی خط ها از چپ به راست و از پایین به بالا انجام گیرد؟



1) 112
2) 56
3) 48
4) 28

تمرین 14: با ارقام 0و0و2و5و3و3و4و4و4 چند عدد 9 رقمی میتوان نوشت ؟

1) $9!$

2) $9!-7!$

3) $8!\times 7$

4) $\frac{8!\times 7}{3!2!2!}$

ترکیب و ترتیب

ترکیب: تعداد حالات مختلفی که می توان از میان n شی متمایز، k شی متمایز را بدون توجه به ترتیب شان انتخاب کرد، برابر است با:

$$c(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ترتیب: تعداد حالات مختلفی که میتوان از n شیء متمایز k شی متمایز را که ترتیب شان اهمیت دارد انتخاب کرد، برابر است با:

$$p(n,k)=(n)_k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

نکته: تعداد زیر مجموعه های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

نکته: می دانیم:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

داریم :

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$$

$$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$$

$$\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2!}$$

$$\binom{n}{3}=\binom{n}{n-3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

نتیجه: تعداد تمام زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر است با: 2^n و داریم:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+.....+\binom{n}{n}=2^n$$

تعداد زیر مجموعه های n عضوی

تعداد زیر مجموعه های یک صفر عضوی

تعداد زیر مجموعه های

مثال: اگر $\binom{n}{n}=2\binom{n}{7}$ باشد، آنگاه n کدام است؟

1) 18
2) 19
3) 20
4) 23

حل:

$$\binom{n}{7}=\frac{n!}{(n-7)!\times 7!} \qquad \binom{n}{8}=\frac{n!}{(n-8)!\times 8!}$$

$$\to (n-7)=2\times 8=16$$
$$n-7=16\to n=23$$

مثال: با 5 نقطه متمایز غیر واقع بر یک استقامت در صفحه، حداکثر چند مثلث می توان تشکیل داد؟

1) 3
2) 5
3) 7
4) 10

حل: هر 3 نقطه متمایز از این 5 نقطه یک مثلث را پدید می آورد پس تعداد کل مثلث ها برابر است با:

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\times 2!}=\frac{3!\times 4\times 5}{3!\times 2}=10$$

مثال: به چند طریق می توان 6 مهره متمایز را درون 10 جعبه متمایز قرار داد، طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار گیرد؟

1) $6!$

2) $10!$

3) $\frac{10!}{4!}$

4) $\frac{10!}{4!\times 6!}$

حل: ابتدا 6 جعبه از 10 جعبه را انتخاب کرده و در هرکدام یک مهره می‌اندازیم

$$\binom{10}{6}=\frac{10!}{6!\times 4!}$$

تمرین 15: یک n ضلعی محدب چند قطر دارد؟

1) $\binom{n}{2}+n$

2) $\binom{n}{2}-n$

3) $\binom{n}{2}+1$

4) $n\binom{n}{2}$

تمرین 16: با ارقام 9و7و5و3و1 چند عدد سه رقمی با شرط ((رقم صدگان > رقم دهگان > رقم یکان)) می توان نوشت؟

1) 8

2) 9

3) 10

4) 12

تمرین 17: به چند طریق می توان 3 کتاب از 5 کتاب سال اول و 4 کتاب از 6 کتاب سال دوم را یک در میان در قفسه ای چید؟

1) $\binom{11}{7}\times 4!\times 3!$

2) $\binom{11}{7}\times 4!\times 3!\times 2!$

3) $\binom{6}{4}\binom{5}{3}\times 4!\times 3!$

4) $\binom{6}{4}\binom{5}{3}\times 4!\times 3!\times 2!$

تمرین 18: حاصل $\binom{15}{5}+.....+\binom{15}{3}+\binom{15}{2}$ کدام است؟

1) $2^{15}-132$

2) $2^{15}-116$

3) $2^{15}-121$

4) $2^{15}-2^4$

تمرین 19: از 10 پرسش موجود، به چند طریق می توان 8 پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد، به شرط آنکه حداقل 4 پرسش از 5 پرسش اول، انتخاب شود؟

1) 25

2) 30

3) 32

4) 35

تمرین 20: از هر یک از مدارس A و B و C و D و E چهار نفر را به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند. به چند طریق می توان سه دانش آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

1) 160
2) 320
3) 480
4) 640

تمرین 21: در یک کیسه تیره رنگ 4 مهره سفید و 6 مهره سیاه وجود دارد. 4 مهره به تصادف از کیسه بیرون می آوریم، در چه تعداد از انتخاب‌ها حداقل 3 مهره سفید بیرون می‌آید؟

1) 20
2) 25
3) 50
4) 75

تمرین 22: از هر یک از 6 منطقه کشوری، 15 دانش آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند، به چند طریق می توان 3 دانش‌آموز از بین آنها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند، انتخاب کرد؟

1) 67500
2) 57600
3) 75600
4) 76500

تمرین 23: با ارقام 5و5و5و4و4و3و3و3 چند عدد 6 رقمی میتوان ساخت ؟

1) 420
2) 380
3) 350
4) 450

اصل پاسکال (شامل و فاقد)

-تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی که فاقد r عضو به‌خصوص باشند،

برابر است با: $\binom{n-r}{2}$

-تعداد زیر مجموعه های k عضوی یک مجموعه n عضوی که فاقد r عضو به‌خصوص باشند،

برابر است با: $\binom{n-r}{k}$

-تعداد زیر مجموعه های ن عضوی یک مجموعه n عضوی که شامل ق عضو به‌خصوص باشند،

برابر است با: $\binom{n-r}{k-r}$

قانون پاسکال: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$

شامل عضوی به خصوص مانند a فاقد عضوی به خصوص مانند a

مثال: مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ مفروض است. به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) مجموعه A چند زیر مجموعه 3 عضوی شامل عضو a دارد؟

حل:

$\{a,...,...\}$ $\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2}=15$

ب) مجموعه A، چند زیر مجموعه 3 عضوی شامل عضو a و فاقد عضو b و c دارد ؟

$\{a,b,c,...,...\}$ $\binom{4}{2}=\frac{4\times3}{2}=6$

تمرین 24: می‌خواهیم از میان لیست 12 نفره دوستانمون، 7 نفر را برای شام به یک رستوران دعوت کنیم اما می دانیم که 2 نفر A و B از این 12 نفر با هم قهر هستند و نباید هر دو را با هم دعوت کنیم. با علم بر این مطلب تعداد تمام انتخاب هایمان چند تا است؟

1) $\binom{12}{7}-\binom{10}{5}$

2) $\frac{1}{2}\binom{12}{7}$

3) $\binom{12}{7}-\binom{12}{5}$

4) $\binom{12}{7}-\binom{10}{7}$

تمرین 25: حاصل $\binom{11}{5}+\binom{9}{4}+\binom{10}{3}+\binom{9}{3}$ کدام است؟

1) $\binom{11}{6}$

2) $\binom{12}{7}$

3) $\binom{11}{7}$

4) $\binom{12}{6}$

تمرین 26: حاصل $\binom{n-2}{k-2}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}$ کدام است؟

1) $\binom{n-1}{k}$

2) $\binom{n}{k-1}$

3) $\binom{n}{k}$

4) $\binom{n-1}{k-1}$

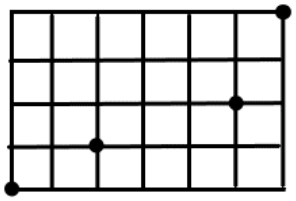
تمرین 27: چند زیرمجموعه از مجموعه $\{a,b,\{b,a\},\{a,b\}\}$ عضو $\{a,b\}$ را ندارد؟

1) 4
2) 6
3) 8
4) 12

تمرین 28: با حروف N و N و I و I و P و E و K چند کلمه 7 حرفی میتوان ساخت که دو N کنار هم باشند ولی دو I کنار هم نباشند؟

1) 360
2) 240
3) 120
4) 60

تمرین 29: در شکل مقابل چند مسیر از A به D با طول حداقل (فقط رو به راست و روبه بالا) وجود دارد به طوری که از نقطه B بگذرد و از نقطه C نگذرد؟



1) 69
2) 72
3) 75
4) 78

تمرین 30: با حروف کلمه FARHAD ، چند رمز عبور 6 حرفی میتوان ساخت، به طوری که دو حرف A در کنار هم نباشند؟

1) 120
2) 180
3) 240
4) 300

تمرین 31: به چند طریق می توان 5 نفر از 9 دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟ (سراسری-۹۹)

1) 84
2) 87
3) 91
4) 95

تمرین 32: به چند طریق می توان 5 کتاب متمایز را بین 3 نفر توزیع کرد، به شرط آنکه هر نفر حداقل یک کتاب، دریافت کند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور-99)

1) 105
2) 125
3) 135
4) 150