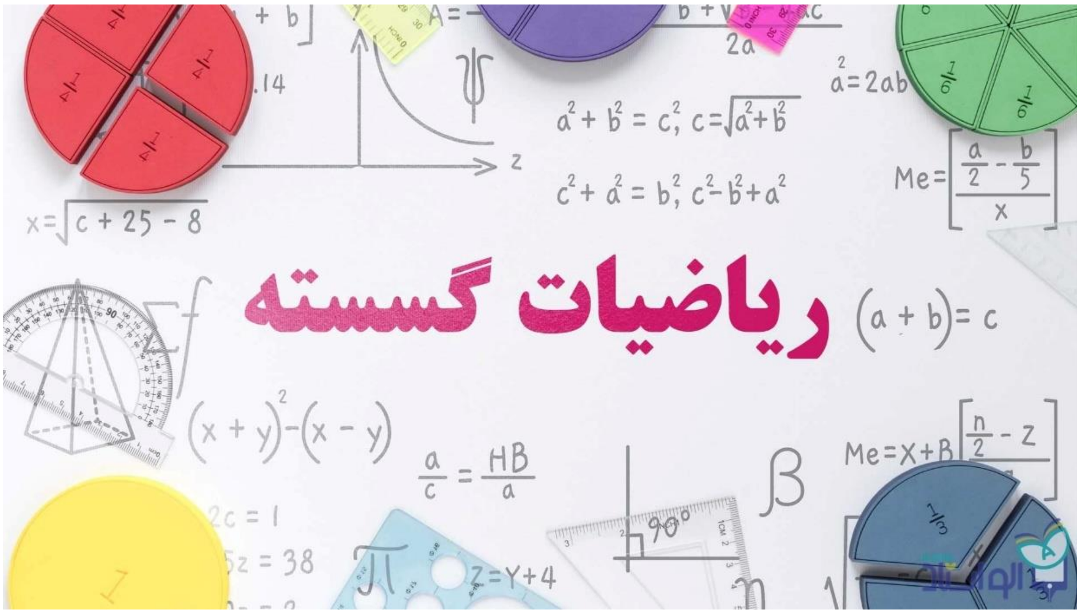

مبحث : نظریه اعداد

مدرس : علیرضا مظاهری

درس 1 : استدلال های ریاضی

قبل از آنکه انواع استدلال های ارائه شده را مورد بررسی قرار دهیم، یک استدلال نادرست ولی رایج را یادآوری می‌کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم حاصل ضرب هر چهار عدد متوالی مضرب 24 است.

ابتدایی ترین مطلبی که به ذهن خطور می‌کند، آن است که صحت مطلب را برای چند نمونه پیگیری می‌کنیم:

- $1,2,3,4: \qquad a_1 = 1\times 2\times 3\times 4 = 24 = 24k$
- $2,3,4,5: \qquad a_2 = 2\times 3\times 4\times 5 = 120 = 24k$
- $3,4,5,6: \qquad a_3 = 3\times 4\times 5\times 6 = 360 = 24k$
- $4,5,6,7: \qquad a_4 = 4\times 5\times 6\times 7 = 840 = 24k$
- $5,6,7,8: \qquad a_1 = 5\times 6\times 7\times 8 = 1680 = 24k$

درستی گزاره‌ی داده شده برای پنج سلسله از ((چهار عدد متوالی)) بررسی شد ولی آیا می‌توانیم قضاوت کنیم که گزاره فوق همیشه برقرار است؟ اگر چنین قضاوتی کنیم آنگاه استدلال درستی انجام نشده است، چرا که ممکن است گزاره‌ای برای موردهای زیادی ارزش درستی داشته باشد ولی برای برخی (حتی یک مورد) از مقادیر برقرار نباشد. به گزاره‌ی دیگه ای به صورت زیر توجه کنید:

- عدد n^2+n+41 به ازای تمام مقادیر طبیعی برای ان عددی اول است.

حاصل عبارت فوق به ازای 1،2،3،4،5،... برای n به ترتیب برابر 43،47،53و61و71و... برداشت می‌شود که علی الظاهر همگی اولند ولی این برداشت و این استدلال ناصحیح است. چرا که به ازای 40 برای n حاصل عبارت فوق برابر 1681 شده و عددی مرکب است،

چون $40^2+40+41=41^2=1681$. بنابراین اگر گزاره‌ای برای 39 عدد از اعداد نخستین طبیعی برقرار باشد، دلیل بر درستی آن گزاره برای 40 نیست

حال به سراغ استدلال‌هایی می رویم که پایه و اساس محکمی داشته و در محکمه ریاضی قابل دفاع است.

1) مثال نقض:

این نوع استدلال برای رد درستی یک گزاره در حالت کلی به کار می‌رود.

در بحث قبلی برای رد درستی گزاره ((عدد n^2+n+41)) به ازای تمام مقادیر طبیعی برای n عددی اول است. **مثال نقض:** $n=40$ وجود دارد.

مثال: برای ((هر عدد طبیعی دو رقمی را می توان به صورت مجموع چندین (بیش از یک) عدد طبیعی متوالی نوشت)) مثال نقض بیاورید.

حل: اعداد 15،14،13،12،11،10 را به طور زیر می توان به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی نوشت :

$$10=1+2+3+4 \qquad 11=5+6 \qquad 12=3+4+5$$
$$13=6+7 \qquad 14=2+3+4+5 \qquad 15=1+2+3+4+5$$

ولی هر چه تلاش کنید عدد 16 را به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی نمی توان نوشت، بنابراین عدد 16 برای گزاره‌ی یادشده مثال نقض محسوب می‌شود.

2) استدلال استنتاجی یا اثبات مستقیم:

استفاده از گزاره‌های درست قبلی، اعم از گزاره هایی که بدیهی هستند یا درستی آنها قبلا اثبات شده است و نتیجه گرفتن گزاره‌ی درست جدید را اثبات مستقیم گویند.

مثال: ثابت کنید مجموع اعداد طبیعی از 1 تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

حل:

روش گاوس:

$$\begin{cases} A=1+2+3+\dots\dots+n \\ A=n+(n-1)+\dots\dots+(n+1) \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \text{رابطه بالا و پایین را جمع می کنیم}$$
$$2A=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\dots\dots+(n+1)}_{n}$$

$$2A=n(n+1)\rightarrow A=\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow$$

$$\boxed{1+2+........+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

مثال: با استفاده از اثبات مستقیم، ثابت ثابت کنید عدد 16^n-1 به ازای تمام مقادیر طبیعی برای ان عددی مرکب است:

حل: از اتحاد $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}b^0+a^{n-2}b^1+....+a^0b^{n-1}\right)$ استفاده می کنیم :

$$16^n-1^n=\underbrace{(16-1)}_{15}\left(16^{n-1}b^0+16^{n-2}\underset{15k}{b^1}+....+16^01^{n-1}\right)=$$

مثال: به شیوه‌ی اثبات مستقیم ثابت کنید مربع هر عدد فرد طبیعی در تقسیم بر 8 باقیمانده 1 دارد.

حل: می دانیم هر عدد طبیعی فرد به فرم $2k+1$ است، بنابراین:

$$?=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$$

چون حاصلضرب هر 2 عدد متوالی مانند $k(k+1)$ عددی زوج است داریم:

$$4\underbrace{k(k+1)}_{2q}+1=4(2q)+1=8q+1$$

3) شیوه اشباع (با در نظر گرفتن همه حالت ها)

گاهی اوقات برای اثبات درستی یک گزاره بهتر است تمامی حالات ممکن را به تعدادی حالت کوچکتر افراز کرده و مسئله را در هر حالت کوچکتر اثبات کرد.

به مثال های زیر توجه کنید:

مثال: ثابت کنید مربع هر عددی به فرم $A=6k+1$ در تقسیم بر 24 باقیمانده 1 دارد.

حل: دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) k عددی زوج باشد، در این صورت:

$$k=2q\Rightarrow A=6\left(2q\right)+1=12q+1\Rightarrow$$
$$A^2=\underbrace{144q^2+24q}_{24\left(\underbrace{6q^2+q}_{t}\right)}+1=24t+1$$

ب) k عددی فرد باشد، در این صورت:

$$k=2q+1\Rightarrow A=6\left(2q+1\right)+1=12q+7$$
$$A^2=144q^2+168q+49=24\left[\underbrace{6q^2+7q+2}_{t}\right]+1=24t+1$$

همانطور که مشاهده می شود در هر دو حالت به درستی گزاره‌ی داده شده پی می‌بریم و چون اجتماع اعداد زوج و فرد، تمام اعداد صحیح می شود، بنابراین اثبات برای تمامی حالات انجام شده است و حالت اشباع رخ داده است.

مثال: ثابت کنید عدد n^5-n به ازای جمیع مقادیر طبیعی برای n مضرب 5 است.

حل: عدد n به یکی از فرم‌های $5k+4, 5k+3, 5k+2, 5k+1, 5k$ است. و در ضمن عدد n^5-n به صورت:

$$n^5-n=n\left(n^4-1\right)=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)=a\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n^2+1\right)$$

قابل تجزیه است، بنابراین پنج حالت را در نظر می گیریم:

الف) n=5k که در این صورت عامل دوم از سمت چپ مضرب 5 بوده و اثبات تمام است.

ب) n=5k+1 که در این صورت عامل اول از سمت چپ مضرب 5 بوده و اثبات تمام است.

پ) n=5k+2 که در این صورت عامل آخر یعنی n^2+1 مضرب 5 شده و اثبات تمام می شود.

$$n^2+1=\left(5k+2\right)^2+1=25k^2+20k+4+1=$$
$$5\left(5k^2+4k+1\right)=5q$$

ت) n=5k+3 که در این صورت نیز عامل n^2+1 مضرب 5 شده و اثبات تمام می شود.

ه) n=5k+4 که در این صورت عامل سوم از سمت چپ مضرب 5 بوده و اثبات تمام می‌شود.

با حالت بندی اثبات به درستی تمام می‌شود. چون اجتماع پنج حالت در نظر گرفته شده تمام اعداد طبیعی می شود.

4) اثبات به شیوه‌ی برهان خلف:

در این شیوه فرض می کنیم حکم برقرار نباشد و با استفاده از منطقی درست و گزاره‌های درست دیگر به تناقض می رسیم. (این تناقض می‌تواند بر علیه یک گزاره‌ی درست دیگر یا علیه فرض مسئله باشد) که در این صورت تناقض ایجاد شده معلوم می‌کند برقرار نبودن حکم غلط و برقراری آن مسجل است.

مثال: با علم به اینکه مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست، ثابت کنید مجموع عدد گویای a و عدد گنگی مانند r عددی گنگ می‌شود.

حل: می خواهیم ثابت کنیم a+r گنگ است. فرض می‌کنیم خلاف آن برقرار باشد یعنی a+r گویا باشد.

در این صورت:

$$a+r=\text{گویا}\Rightarrow \text{گویا}-a=\text{گویا}+\left(-a\right)=\text{گویا}$$

معلوم است که جمله‌ی به دست آمده تناقض است، چون r که عددی گنگ بود با یک عدد گویا برابر شده است. بنابراین a+r گویا بودن غلط و گنگ بودن آن صحیح است.

اثبات بازگشتی :

با توجه به اینکه از درستی گزاره‌ی ترکیبی $P \Leftrightarrow Q$ معلوم می‌شود که دو گزاره P و Q هم ارزشند، بنابراین بعضی از مواقع ناچار می شویم حکم داده شده را چندین مرحله ساده کنیم و به یک عبارتی برسیم که درستی یا نادرستی آن مسجل است.

به شرط آنکه تمام روابط، برگشت پذیر باشند، معلوم می شود حکم داده شده ارزشی برابر با گزاره آخر دارد.

مثال: برای هر سه عدد حقیقی c,b,a ثابت کنید نابرابری $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ همیشه برقرار است.

حل:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2ac-2bc \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(a^2+b^2-2ab\right)+\left(a^2+c^2-2ac\right)+\left(b^2+c^2-2bc\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\left[\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(b-c\right)^2 \geq 0\right]$$

بررسی تمرینات کتاب درسی ریاضیات گسسته:

تمرین 1: گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند داریم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y$$

تمرین 2: عدد حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3<x^2$

تمرین 3: اگر α, β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشند ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

تمرین 4: آیا اعداد صحیحی مانند x و y وجود دارند که:

$$x^2+y^2=(x+y)^2$$

تمرین 5: آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad (a+b\neq 0)$$

تمرین 6: آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b وجود دارند که:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad (a+b\neq 0)$$

تمرین 7: گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید:

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

تمرینات تستی:

تمرین 1: کدام یک از گزینه های زیر مثال نقض دارد؟

1) هر مربع یک لوزی است.
2) هر عدد اول و بزرگتر از دو فرد است.
3) هر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الساقین است.
4) توان دوم هر عدد طبیعی کوچکتر از توان سوم آن است.

تمرین 2: کدام دو عدد کلیت حکم ((مجموع مربعات هر دو عدد اول، عددی اول است)) را نقض می‌کنند؟

1) 2و1
2) 5و3
3) 5و4
4) 3و2

تمرین 3: برای گزاره‌ی ((عدد $3^n - 1$ به ازای هر عدد طبیعی بزرگتر از 2 برای n مرکب است)) کدام عدد مثال نقض است ؟

1) 7
2) 8
3) 10
4) مثال نقض ندارد.

تمرین 4: کدام یک از اعداد زیر برای گزاره‌ی ((اگر مجموع ارقام عددی به 11 بخش پذیر باشد، آنگاه خود آن عدد نیز بر ۱۱ بخش پذیر است)) مثال نقض است؟

1) 5761
2) 5665
3) 56
4) 99

تمرین 5: در اثبات یک مسئله به شیوه برهان خلف:

1) ثابت می‌کنند خلاف حکم نادرست است.
2) ثابت می‌کنند خلاف فرض نادرست است.
3) ثابت می‌کنند حکم نادرست است.
4) ثابت می‌کنند فرض نادرست است.

تمرین 6: کدام یک از اعداد زیر کلیت حکم ((عددی که در تقسیم بر 8 باقیمانده 1 بیاورد مربع کامل است)) را رد می کند؟

1) 25
2) 36
3) 120
4) 89

تمرین 7 : برای اثبات درستی گزاره‌ی ((مربع هیچ عدد طبیعی به فرم 5k+2 نیست)) به شیوه اشباع، برای n چند حالت مختلف در نظر گرفته می شود؟

1) 2
2) 4
3) 3
4) 5

تمرین 8: در اثبات نابرابری $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ به ازای a و b های مثبت به شیوه بازگشتی، رابطه بدیهی که در پایان حاصل می شود کدام است؟

1) $(a+b)^2\geq 0$
2) $(a+b)^2\leq 0$
3) $a+b\geq 0$
4) $|a+b|\geq 1$

تمرین 9: برای اثبات درستی چه تعداد از گزاره های زیر برهان خلف مناسب تر است؟

_مجموع دو عدد گویا، عددی گویاست. _حاصل ضرب دو عدد زوج، مضرب ۴ است.
_مجموع اعداد طبیعی از یک تا ان برابر است.

1) 0
2) 1
3) 2
4) 3

تمرین 10: اگر β,α هر دو گنگ بوده ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، آنگاه چه تعداد از اعداد $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ و $3\alpha+2\beta$ حتماً گنگ هستند؟

1) 0
2) 1
3) 2
4) 3

تمرین 11: درستی کدام یک از گزینه های زیر را با مثال نقض نمی توان رد کرد؟

1) اعداد طبیعی x و y وجود دارد که $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$
2) حاصل ضرب پنج عدد متوالی، بر 120 بخش پذیر است.
3) اگر برای سه مجموعه A،B وC تساوی $A\cup B=A\cup C$ برقرار باشد، آنگاه $B=C$ است.
4) مجموع 6 عدد متوالی مضرب 6 است.

تمرین 12: کدام عدد کلیت حکم ((عدد $P^{P+1}+2$ به ازای تمام مقادیر اول عددی مرکب است)) را نقض می‌کند؟

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

تمرین 13: چند زوج مرتب مانند (aوb) از اعداد حقیقی و ناصفر وجود دارد به طوری که تساوی $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$ برقرار باشد؟

1) 0
2) 1
3) 2
4) بی شمار

بخش پذیری و همنهشتی:

_بخش پذیری در اعداد صحیح:

عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش‌پذیر گویند هرگاه عدد صحیحی مانند q چنان یافت شود که $a = b \times q$ بخش پذیری a بر b را به صورت $b|a$ نمایش داده و آن را به یکی از صورت های زیر می خوانند:

- عدد b عدد a را می‌شمارد.
- عدد b عدد a را عاد می‌کند.
- عدد b مقسوم علیهی از a است.
- عدد a مضربی از عدد b است.

قرار داد: چون بی‌شمار عدد صحیح مانند q یافت می شود که در تساوی $0 \times q = 0$ صدق کند بنابراین می‌پذیریم که عدد صفر خودش را عاد می‌کند یعنی $0|0$ این قرارداد با تعریف بخش پذیری سازگار است.

اگر عدد صحیح b مقسوم علیهی از عدد صحیح a نباشد آن را به صورت $b \nmid a$ نمایش می‌دهند.

مثال: مجموع مقسوم علیه های مثبت عدد 90 را بنویسید.

حل: مجموعه مقسوم علیه های مثبت 90 به شکل زیر هستند که الگوریتم نوشتار آن در ادامه توضیح داده شده:

$$D_{90} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید مقسوم علیه‌های مثبت هر عددی از جمله 90 دو به دو جفت هم شده و حاصل ضربشان 90 می‌شود.

بنابراین با تشخیص مقسوم علیه های کوچک یک عدد، مقسوم علیه های بزرگ آن خود به خود بدست می‌آید.

نکته 1: می دانیم $n=\sqrt{n}.\sqrt{n}$ بنابراین اگر عدد n مانند تساوی $n=a.b$ به صورت حاصلضرب دو عدد طبیعی و متمایز a و b نوشته شود آنگاه یکی از آن دو عدد از $\sqrt{n}$ بیشتر و دیگری از $\sqrt{n}$کمتر است. در مثال قبل چون $\sqrt{90}\simeq 9.5$ بنابراین در هر جفت مورد اشاره‌ای یکی از اعداد از 9.5 بیشتر و دیگری از 9.5 کمتر است، یعنی برای پیدا کردن مقسوم علیه های مثبت عدد n اگر مقسوم علیه های کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ یافت شوند مقسوم علیه های بزرگتر از $\sqrt{n}$ نیز به راحتی پیدا خواهند شد.

نکته 2: اگر n مربع کامل باشد، آنگاه چون یکی از مقسوم علیه ها $\sqrt{n}$ می‌شود که جفت ندارد آنگاه تعداد مقسوم علیه های مثبت آن عددی فرد، و در غیر این صورت تعداد مقسوم علیه های مثبت آن زوج خواهد بود.

مثال: چند عدد طبیعی مانند k یافت می‌شود که $k|96$ و $k|180$؟

حل: به سبک اشاره شده در مثال قبل، D_{96} و D_{180} را می نویسیم:

$$D_{96}=\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,32,48,96\}$$
$$D_{180}=\{1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,15,18,20,30,36,45,60,90,180\}$$
$$\Rightarrow D_{96}\cap D_{180}=\{1,2,3,4,6,12\}$$

لازم به ذکر است بعد از بیان مبحث ب.م.م و ک.م.م راه حل راحت تری بیان می شود.

لازم به ذکر است که بعد از بیان بحث ب.م.م و ک.م.م برای حل چنین سوالاتی راه حل راحت تری بیان خواهد شد.

تست: تعداد مقسوم علیه های مثبت کدام یک از اعداد زیر برابر 15 است؟

1) 800
2) 600
3) 400
4) 700

حل: در این سوال هدف تاکید بر نکته‌ی 2 است. که تعداد مقسوم علیه های مثبت اعداد مربع کامل، فرد است. در بین گزینه ها فقط 400 مربع کامل است.

تست: چند عدد طبیعی مانند وجود دارد که $k|108$ و $k \nmid 24$ ؟

1) 5
2) 6
3) 7
4) 8

$$D_{180}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,27,36,54,108\}$$
$$D_{24}=\{1,2,3,4,6,12,24\}$$
$$?=\left|D_{108}\cap\overline{D_{24}}\right|=\left|D_{108}-D_{24}\right|=\left|D_{108}\right|-\left|D_{108}\cap D_{24}\right|$$
$$=12-\left|\{1,2,3,4,6,12\}\right|=12-6=6$$

تست: تعداد ارقام عدد حاصل از حاصل ضرب تمام مقسوم علیه های مثبت عدد 1008 به کدام نزدیک تر است؟

1) 16
2) 32
3) 24
4) 42

تاکید این سال به این است که در مثال 1 حاصلضرب هر دو عدد موجود در یک جفت همان 90 می‌شود. بنابراین در آن سوال چون تعداد مقسوم علیه های مثبت برابر 12 یعنی 6 جفت بدست آمد، بنابراین حاصلضرب تمام مقسوم علیه های مثبت 90 برابر 90^6 بدست می آید.

نکته 3: اگر تعداد مقسوم علیه های مثبت عدد n برابر k باشد، آنگاه حاصلضرب تمام مقسوم علیه های مثبت عدد n برابر $n^{\frac{k}{2}}$ یا $(\sqrt{n})^k$ خواهد شد. (نگران این موضوع که k یعنی تعداد مقسوم علیه های مثبت n فرد باشد، نباشید چون در این صورت n مربع کامل شده و $\sqrt{n}$ عددی طبیعی است.)

مجموعه مقسوم علیه های 1008 به شکل زیر است:

$$D_{1008} = \left\{ \begin{array}{l} 1,2,3,4,6,7,8,9,12,14,16,18,21,24, \\ 28,36,42,48,56,63,72,84,112,126 \\ ,144,168,252,336,504,1008 \end{array} \right\}$$

همانطور که مشخص است عدد 1008 دارای 30 مقسوم علیه است. بنابراین طبق نکته 3 حاصلضرب تمام آن مقسوم علیه ها برابر 1008^{15} است که اگر 1008 را تقریباً 1000 در نظر بگیریم عدد حاصل 10^{45} خواهد شد که عددی 46 رقمی است.

نکته 4: اگر عدد n به صورت $n = P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}............P_k^{\alpha_k}$ به حاصلضرب عوامل اول تجزیه شده باشد. آنگاه تعداد مقسوم علیه های مثبت آن برابر $(\alpha_1+1).(\alpha_2+1)............(\alpha_k+1)$ خواهد بود.

با توجه به نکته فوق در تست قبل تعداد مقسوم علیه های عدد 1008 با توجه به تجزیه‌ی آن که به صورت $2^4 \times 3^2 \times 7^1$ است برابر: $(4+1).(2+1).(1+1)$

یعنی 30 بدست می‌آید و نیازی به نوشتن تمام مقسوم علیه های آن نیست.

با توجه به نقطه 4 درستی نکته 2 را بار دیگر درک خواهید کرد به این صورت که اگر تعداد مقسوم علیه های مثبت n عددی فرد باشد. آنگاه تمام (α_i+1)ها فرد شده و در نتیجه همه α_iها زوج خواهد شد. و زوج بودن تمام توان ها در تجزیه عدد به حاصلضرب عوامل اول به آن معناست که آن عدد مربع کامل است.

مثال: مجموع تمام مقسوم علیه های مثبت عدد $3^4\times 7^3$ را بیابید.

حل: با توجه به نکته‌ی 4 معلوم می شود که عدد داده شده به تعداد 4×5 یعنی 20 مقسوم علیه مثبت دارد که به شکل زیرند:

$$\begin{array}{ccccc}
3^0\times 7^0 & 3^1\times 7^0 & 3^2\times 7^0 & 3^3\times 7^0 & 3^4\times 7^0\\
3^0\times 7^1 & 3^1\times 7^1 & 3^2\times 7^1 & 3^3\times 7^1 & 3^4\times 7^1\\
3^0\times 7^2 & 3^1\times 7^2 & 3^2\times 7^2 & 3^3\times 7^2 & 3^4\times 7^2\\
3^0\times 7^3 & 3^1\times 7^3 & 3^2\times 7^3 & 3^3\times 7^3 & 3^4\times 7^3
\end{array}$$

مجموع اعداد ستون اول برابر $3^0\times\frac{7^4-1}{7-1}$ ، ستون دوم برابر $3^1\times\frac{7^4-1}{7-1}$ ،... و ستون پنجم برابر $3^4\times\frac{7^4-1}{7-1}$ و مجموع کل آنها برابر $\left(\frac{7^5-1}{7-1}\right)\left(\frac{3^5-1}{3-1}\right)$ می شود.

نکته 5: اگر عدد n به صورت $n=P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}............P_k^{\alpha_k}$ به حاصلضرب عوامل اول تجزیه شده باشد آنگاه مجموعه تمام مقسوم علیه های مثبت n برابر $\left(\frac{P_1^{\alpha_1+1}-1}{P_1-1}\right)\left(\frac{P_2^{\alpha_2+1}-1}{P_2-1}\right)......\left(\frac{P_k^{\alpha_k+1}-1}{P_k-1}\right)$ خواهد شد.

تست: مجموع ارقام بزرگترین عدد طبیعی سه رقمی مانند n که در رابطه‌ی $7|11n-3$ صدق کند کدام است؟

1) 21
2) 22
3) 23
4) 24

برای حل نرمال امثال این مثال ها یک راه حل در قسمت تقسیم و یک راه حل در قسمت هم‌نهشتی ارائه خواهد شد ولی در این قسمت سعی بر آن است که با سعی و خطا پیش رفته و اعداد را از 999 به پایین امتحان کنید تا به اولین پاسخ دست یابید.

اولین عدد مورد نظر 993 پیدا می‌شود که مجموع ارقامش 21 است.

خواص بخش پذیری و عاد کردن:

اگر a،b،c،d،kوm اعداد صحیح و n عددی طبیعی باشند آنگاه

$$\forall a \in z: \quad \pm 1 | a \quad \pm a | a$$

یعنی هر عدد صحیحی حداقل 4 تا مقسوم علیه دارد 1،1- خود عدد، قرینه‌ی عدد.

تنها اعدادی که از این امر مستثنی هستند 1و1- است. که هر کدام فقط دو مقسوم علیه 1و1- را دارند.

اینکه هر عددی خودش را عاد می‌کند خاصیت بازتابی عاد کردن می گویند.

یعنی صفر بر همه‌ی اعداد صحیح (از جمله خودش) بخش پذیر است.

$$\forall a \in z: \quad a | 0$$

یعنی تنها عددی که بر صفر بخش پذیر است خود صفر است.

$$0 | a \Rightarrow \quad a = 0$$

$$a | b, b | a \Rightarrow \quad |a| = |b|$$

$$a | b, b | c \Rightarrow \quad a | c$$ (خاصیت تعدی)

$$a | b, c | d \Rightarrow \quad ac | bd$$

$$a | b \Leftrightarrow \quad a^n | b^n$$

$$a | b, b \neq 0 \Rightarrow \quad |a| \leq |b|$$

$$a | b \Rightarrow \quad a | kb \;,\; k.a | k.b$$

$$k.a | k.b \;,\; k \neq 0 \Rightarrow a | b$$

$$a | b \;,\; a | c \Rightarrow \underbrace{a | m.b + k.c}_{\text{ترکیب خطی bو a}}$$

ویژگی آخر را به این صورت بیان می‌کنند که اگر a هر دو عدد b و c را عاد کند هر ترکیب خطی صحیح bو c را نیز عاد می‌کند.

از بین ویژگی های فوق درستی ویژگی آخر را اثبات می کنیم:

$$\left.\begin{aligned} a | b \Rightarrow \quad b = aq \Rightarrow \quad m.b = a.mq \\ a | c \Rightarrow \quad c = aq' \Rightarrow \quad k.c = a.kq' \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$mb + kc = a\underbrace{(mq + kq')}_{q''} \Rightarrow mb + kc = a.q''$$

$$\Rightarrow a | mb + kc$$

اثبات هر یک از سایر ویژگی به سادگی انجام پذیر است فقط اثبات $a|b$ از روی $a^n|b^n$ کمی دشوار است و در سطح کتاب درسی نیست.

تست: اگر $24|k$ و $k|960$ آنگاه برای k چند مقدار صحیح یافت می‌شود؟

1) 12
2) 15
3) 16
4) 18
5)

تست: مجموع ارقام بزرگترین مقدار طبیعی ممکن برای k که در رابطه‌ی $7k-3|180$ صدق کند، کدام است؟

1) 8
2) 9
3) 10
4) 12

مثال: بزرگترین عدد طبیعی k را چنان بیابید که در رابطه‌ی $11k-7|32k+5$ صدق کند.

مثال: اگر برای اعداد طبیعی x و y هر دو رابطه‌ی $3x+2y|4x-3y, y|x$ و برقرار باشند، آنگاه حاصل $\frac{x}{y}$ را بیابید.

مثال: اگر a و b اعداد صحیح باشند آنگاه ارزش درستی گزاره های شرطی زیر را بررسی کنید.

1) $a|b \Rightarrow \quad a^2|b^3$

2) $a^2|b^3 \Rightarrow \quad a|b$

3) $a^7|b^{11} \Rightarrow \quad a^{30}|b^{47}$

4) $a^{30}|b^{47} \Rightarrow \quad a^7|b^{11}$

نکته: با استفاده از مثال قبل ثابت می شود که اگر از $a^k|b^L$ رابطه‌ی $a^m|b^n$ نتیجه شود آنگاه نابرابری $\frac{n}{m} \geq \frac{l}{k}$ برقرار است و برعکس.

مثال: در هر یک از موارد زیر تمام مقادیر صحیح n را چنان بیابید که حاصل عبارات داده شده عددی صحیح باشد.

1) $\frac{35}{3n+2}$

2) $\frac{3n+2}{n+5}$

3) $\frac{2n^2+3n-1}{n-2}$

4) $\frac{7n-1}{3n+2}$

تست: تعداد مقسوم علیه های مثبت عدد صحیح $X = 2^m \times 5^n$ از تعداد مقسوم علیه های مثبت صحیح $\frac{x}{40}$، 12 واحد بیشتر است. حداقل مقدار x ، کدام است؟

(سراسری ریاضی-1400)

1) 640
2) 800
3) 1000
4) 1280

تمرینات تستی این بخش

تمرین 1: اگر $a-b|a$ آنگاه:

1) $a|a-b$
2) $b|a-b$
3) $a|b$
4) $a-b|b$

تمرین 2: کدامیک از گزاره های زیر ارزش درستی دارد؟

1) $(a|b+c) \Rightarrow (a|b, a|c)$
2) $(a|b+c) \Rightarrow (a|b, a|c)$
3) $(a+b|c) \Rightarrow (b|c, a|c)$
4) $ab|c \Rightarrow (a|c, b|c)$

تمرین 3: اگر اعداد طبیعی a ، b و c چنان باشد که $b^2|ac$ و $a|b$ آنگاه:

1) $a|c$
2) $c|b$
3) $b|a$
4) $c|a$

تمرین 4: اگر a ، b و c سه عدد طبیعی چنان باشند که $a|b-c$ و $b|a$ آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

1) $b|c$
2) $a|c$
3) $c|a$
4) $c|b$

تمرین 5: کدامیک از گزینه های زیر درست است؟

1) اگر $a|2b+3c$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$
2) اگر $2b+3c|a$ آنگاه $b|a$ یا $c|a$
3) اگر $a|7bc$ آنگاه $a|b$ و $a|c$
4) اگر $7bc|a$ آنگاه $b|a$ و $c|a$

تمرین 6: اگر دو عدد صحیح a و b چنان باشند که $a-b|a+b$ آنگاه کدام گزاره ارزش همواره درستی ندارد؟

1) $a-b|4a+b$
2) $a-b|4a+2b$
3) $a-b|2a$
4) $a-b|3a+7b$

تمرین 7: کدامیک از گزاره های زیر در حالت کلی درست نیست؟

1) $a|b \Rightarrow a^4|b^7$

2) $a^5|b^5 \Rightarrow a^7|b^9$

3) $a|b \Rightarrow a|5a+7b$

4) $a|5a+7b \Rightarrow a|b$

تمرین 8: اگر $11|5a+3b$ آنگاه باقیمانده تقسیم $27a-8b$ بر 11 کدام است؟

1) 0

2) 3

3) 5

4) 8

تمرین 9: اگر $2a+5b|3a-2b$ آنگاه کدامیک از اعداد زیر مضربی از $2a+5b$ است؟

1) 28b

2) 15b

3) 18b

4) 35b

تمرین 10: چند عدد صحیح مانند n وجود دارد به طوری که $5n-2|72$ ؟

1) 2

2) 4

3) 6

4) 8

تمرین 11: چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد به طوری که $n^2+2|150$ ؟

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

تمرین 12: روی منحنی $y=\frac{2x+1}{x+3}$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

1) 2
2) 4
3) 6
4) 8

تمرین 13: برای چند عدد صحیح مانند n رابطه‌ی $3n+2|2n^2-1$ برقرار است؟

1) 0
2) 1
3) 2
4) 4

تمرین 14: کدام یک از گزاره های زیر برای اعداد صحیح غیر صفر a ، b و c ارزش درستی ندارد؟

1) $ab|c \Rightarrow a|c$
2) $a|b \Rightarrow ac|b$
3) $abc|1 \Rightarrow |a|=1$
4) $a|b \Rightarrow a|bc$

تمرین 15: چند عدد مثبت a مضرب 18 وجود دارد که $a|2700$ ؟

1) 16
2) 12
3) 18
4) 24

تمرین 16: اگر $7|a+b$ آنگاه کدام رابطه ارزش درستی دارد ؟

1) $7|7a+3b$
2) $7|5a-2b$
3) $7|a^2+b$
4) $7|a^2+b^2$
5)

تمرین 17: اگر $a-b|2a+b$ آنگاه کدام یک از نتایج زیر ممکن است نادرست باشد ؟

1) $a-b|5a+b$
2) $a-b|2a+4b$
3) $a-b|6a+b$
4) $a-b|8a-2b$

تمرین 18: اگر $bc^2|bc+c^2$ آنگاه کدام گزاره ممکن است نادرست باشد ؟ $(c\neq 0)$

1) $b|2c$
2) $2c|3b$
3) $c|5b$
4) $b|3c+b$

تمرین 19: اگر اعداد طبیعی a،b وc چنان باشند که $b^3|ac^2$ و $a^2|b$ آنگاه چه تعداد از گزاره های زیر ارزش درستی دارند ؟

$\_\,a^2|c$ $\_\,a|b$ $\_\,b|c$ $\_\,a|c$

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

تمرین 20: از گزاره‌ی $a^3|b^5$ کدام یک از گزاره های زیر نتیجه می شود ؟

1) $a^7|b^{11}$
2) $a^{10}|b^{17}$
3) $a^{13}|b^{19}$
4) $a^{14}|b^{23}$

تمرین 21: شرط $a^5|b^3$ چه نوع شرطی برای $a^7|b^5$ است ؟

1) لازم
2) کافی
3) هم لازم و هم کافی
4) نه لازم و نه کافی

تمرین 22: چند عدد طبیعی و فرد و مضرب 3 وجود دارد که عدد 3000 را عاد می‌کند ؟

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6

تمرین 23: کدام گزاره ارزش درستی ندارد ؟

1) $\forall n \in N : 2 | n^{80} + n^{71}$

2) $\forall n \in N : 6 | n^{80} + n^{78}$

3) $\forall n \in N : 5 | n^{80} + n^{75}$

4) $\forall n \in N : 12 | n^{4} + n^{2}$

تمرین 24: اگر $12 | 14x + 15y$ آنگاه کدام رابطه ممکن است نادرست باشد ؟

1) $2 | y$

2) $3 | x$

3) $6 | 2x + 3y$

4) $4 | y$

تمرین 25: اگر $7 | a + 4b + 11$ و $7 | 8a - 3b + k$ آنگاه کمترین مقدار طبیعی k کدام است ؟

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

تمرین 26: به ازای چند مقدار طبیعی برای n حاصل $\frac{5n-2}{3n+1}$ عددی صحیح می شود ؟

1) 0

2) 1

3) 2

4) 3

تمرین 27: اگر $3n+2|7n+3$ آنگاه کدام یک از گزینه های زیر لزوم ارزش درستی ندارد ؟

1) $3n+2|5n+2$

2) $3n+2|3n+7$

3) $3n+2|n-1$

4) $3n+2|2n+3$

کاربرد بخش پذیری در اتحاد ها:

به اتحاد های زیر توجه کنید.

1. به ازای جمیع مقادیر طبیعی برای n اتحاد زیر برقرار است:

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}b^0+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+\ldots+a^0b^{n-1}\right)$$

2. به ازای مقادیر زوج طبیعی برای ان اتحاد زیر برقرار است:

$$a^n-b^n=(a+b)\left(a^{n-1}b^0+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+\ldots+a^0b^{n-1}\right)$$

3. به ازای مقادیر فرد طبیعی برای ان اتحاد زیر برقرار است:

$$a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}b^0-a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+\ldots+a^0b^{n-1}\right)$$

با توجه به اتحاد های زیر خواهیم داشت:

نکته 7: اگر a و b اعداد صحیح دلخواهی باشند آنگاه :

$$\forall n\in N: a-b\big|a^n-b^n, \forall n\in E: a+b\big|a^n+b^n$$

$$\forall n\in O: a+b\big|a^n+b^n$$

E: مجموعه اعداد زوج طبیعی

O: مجموعه اعداد فرد طبیعی

مثال: باقیمانده تقسیم $3^{36}-2^{36}$ بر 35 را بیابید.

اگر عدد $3^{36}-2^{36}$ را به صورت $9^{18}-4^{18}$ بنویسیم، باز به خاطر زوج بودن توان آن عدد هم بر $(9-4)$ یعنی 5 و هم بر $(9+4)$ یعنی 13 بخش پذیر است.

اگر عدد $3^{36}-2^{36}$ را به صورت $27^{12}-8^{12}$بنویسیم مانند حالات قبل به خاطر زوج بودن توان عدد حاصل هم بر $(27-8)$ یعنی 19 بخش پذیر است و هم بر $(27+8)$ یعنی 35

مثال: عدد $2^{1380}-1$ به چه تعداد از اعداد 3،5،7،9،13و35 بخش پذیر است ؟

حل:

$$2^{1380}-1=2^{1380}-1^{1380} \Rightarrow \begin{cases}(2-1)=1\\(2+1)=3\end{cases}$$

$$2^{1380}-1=4^{690}-1^{690} \Rightarrow \begin{cases}(4-1)=3\\(4+1)=5\end{cases}$$

$$2^{1380}-1=8^{460}-1^{460} \Rightarrow \begin{cases}(8-1)=7\\(8+1)=9\end{cases}$$

$$2^{1380}-1=16^{345}-1^{345} \Rightarrow \{(6-1)=15$$

توجه: چون در عبارت اخیر توان فرد شده دیگر نمی توان نتیجه گرفت که عدد حاصل بر a+b یعنی 17 نیز بخش پذیر است.

توجه: چون در عبارت اخیر توان فرد شده دیگر نمی‌توان نتیجه گرفت که عدد حاصل بر a+b یعنی 17 بخش پذیر است.

توجه: اگر عددی هم بر 3 بخش پذیر باشد و هم بر 5، معلوم است که آن عدد بر 15 نیز بخش پذیر است. بنابراین بخش پذیر بودن بر 15 را می‌شد قبل از نوشته آخر و از نوشته های قبلی نتیجه گرفت :

$$2^{1380}-1=\left(2^{6}\right)^{230}-1=64^{230}-1^{230}\Rightarrow\begin{cases}(64-1)=63\\(64+1)=65\end{cases}$$

توجه: اگر عددی بر m بخش پذیر باشد آنگاه به تمام مقسوم علیه های m نیز بخش پذیر است. بنابراین به خاطر بخش پذیر بودن عدد داده شده بر 65 معلوم می‌شود که عدد دادها شده به تمام مقسوم علیه های 65 از جمله 13 بخش پذیر است.

مثال: باقیمانده تقسیم $A=2^{1397}$ بر 7 را بیابید.

حل: قبل از ارائه راه حل لازم است بدانید که حل این نوع سوالات در قسمت همنهشتی به راحتی انجام خواهد شد، فقط در این قسمت قصد بر آن است که مطلب نوشته شده در نکته 7 بیشتر تعمیق بشود.

توانی از 2 که در مجاورت 7 و یا مضربی از 7 قرار دارد 3 است $\left(2^{3}=7+1\right)$ بنابراین:

$$A=2^{1397}=2^{2}\times2^{1395}=2^{2}\times\left(2^{3}\right)^{465}=4\times8^{465}$$

$$=4\left[8^{465}-1^{465}+1\right]=4\times(7k+1)=7k'+4$$

تست: عدد $2^{n}+1$ بر 65 بخش پذیر است. برای n چند مقدار طبیعی دو رقمی یافت می شود.

1) 7
2) 8
3) 14
4) 15

مفاهیم ب.م.م و ک.م.م از روی بخش پذیری:

ب.م.م : مجموع مقسوم علیه های مثبت دو عدد 168 و 264 را می نویسیم:

$$D_{168}=\{1,2,3,4,6,7,8,12,14,21,24,28,42,56,84,168\}$$

$$D_{264}=\{1,2,3,4,6,8,11,12,22,24,33,44,66,88,132,264\}$$

همانطور که مشاهده می کنید 8 عدد طبیعی وجود دارد که در هر دو عبارت $a|168$ و $a|264$ به جای آب صدق کنند که بزرگترین آنها عدد 24 است.

24 را بزرگترین مقسوم علیه مشترک 168 و 264 نامیده و آن را به صورت $(168,264)=24$ نمایش می دهند.

معلوم است که سایر مقسوم علیه های مشترک یعنی 12و8و6و4و3و2و1 همگی خود مقسوم علیه‌ای از ب.م.م 168 و 264 محسوب می‌شوند و می‌توان نکات زیر را نتیجه گرفت:

نکته: اگر عددی هم مقسوم علیه آب و هم مقسوم علیه b، آنگاه آن عدد مقسوم علیه‌ای از آن دو عدد خواهد بود، یعنی:

$$\left.\begin{matrix} x|a \\ x|b \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x|(a,b)$$

لازم به ذکر است که نتیجه گیری فوق دو طرفه است.

اگر ب.م.م دو عدد a و b برابر 1 باشد آنگاه آن دو عدد را متباین یا نسبت به هم اول گویند.

نکته: اگر $(a,b)=d$ آنگاه هم a مضرب d است و هم b، یعنی $a=a'd$ و $b=b'd$ و در ضمن باید دو ضریب a’ و b’ نسبت به هم اول باشند چون اگر a’ و b’ مشترکا بر عدد طبیعی‌ای مانند $t(t>1)$ بخش پذیر باشند آنگاه هم a و هم b هر دو بر t.d بخش پذیر می شوند.

که در آن صورت t.d مقسوم علیه مشترکی از a و b می شود و ب.م.م بودن d در تضاد است، بنابراین:

$$\boxed{(a,b)=d} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} a=a'd \\ b=b'd \\ (a',b')=1 \end{array}}$$

تست: بزرگترین شمارنده مشترک دو عدد a و b برابر 490 است. آن دو عدد چند شمارنده مشترک مثبت دارند؟

1) 10
2) 12
3) 14
4) 16

تست: دو عدد طبیعی a و 210 چنانند که $(a,210)=15$. برای a چند مقدار طبیعی کوچکتر از 210 پیدا می شود؟

1) 14
2) 13
3) 7
4) 6

مثال: چند عدد طبیعی مانند k یافت می شود که $k|3600$ و $k|1500$ ؟

مثال: چند عدد طبیعی وجود دارد که:

الف) هم مقسوم علیه 1848 باشد و هم مقسوم علیه 3276؟

ب) مقسوم علیه 1848 باشد ولی مقسوم علیه 3276 نباشد؟

مثال: چند جفت عدد طبیعی وجود دارد که ب.م.م شان 12 و مجموعشان 168 باشد.

مثال: اگر $d=(5n+3,3n-2)$ آنگاه تمام مقادیری که دی می‌تواند داشته باشد را بیابید.

$d|5n+3$

$d|3n-2$

مثال: اگر $d=(8a-6,16a+4)$ آنگاه تمام مقادیری که d می‌تواند به خود بپذیرد را بیابید.

ک.م.م : مجموعه مضارب طبیعی دو عدد 18 و 30 را می نویسیم:

$$18: 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, 198, 216,$$
$$234, 252, 270, 288, \ldots$$
$$30: 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, \ldots$$

اعدادی مانند 90و180و270و... که در هر دو رشته وجود دارند را مضرب مشترک دو عدد 18 و 30 می گویند و عدد 90 که در بین آنها مضارب مشترک از همه کمتر است را کوچکترین مضرب مشترک می نامند و به صورت $[18,30]=90$ نمایش می‌دهند، سایر مضارب مشترک همگی مضرب 90 هستند، بنابراین:

نکته 10: اگر عدد m مضرب مشترک هر دو عدد a و b باشند آنگاه مضرب ک.م.م آن دو عدد نیز خواهد بود یعنی:

$$\begin{matrix} a|m \\ b|m \end{matrix} \Leftrightarrow [a,b]|m$$

این نتیجه‌گیری هم همانند نکته 8 نتیجه گیری دو طرف است.

نکته: از نکته 9 و تعریف ک.م.م معلوم می‌شود که:

$$[a,b]=|a',b'|d$$

نکته: اگر aوb دو عدد صحیح چنان باشند که $(a,b)=d$ و $[a,b]=c$ نیز k عددی صحیح و n عددی طبیعی دلخواه باشند آنگاه تمام روابط زیر برقرارند:

$$(ka,kb)=|k|.d \quad [ka,kb]=|k|.c$$
$$\left(\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right)=\frac{d}{|k|} \quad \left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]=\frac{c}{|k|}$$
$$\left(a^n,b^n\right)=d^n \quad \left[a^n,b^n\right]=c^n$$

نکته: اگر a،b وc سه عدد صحیح دلخواه باشند آنگاه:

$$(a,b)=(a,-b)=(-a,b)=(-a,-b)$$
$$[a,b]=[a,-b]=[-a,b]=[-a,-b]$$
$$(a,b).[a,b]=d\times(|a'b'd|)=|a'd.b'd|=|ab|$$
$$((a,b),c)=(a,(b,c))=(a,b,c)$$
$$[[a,b],c]=[a,[b,c]]=[a,b,c]$$

نکته: اگر $a|b.c$ آنگاه دلیلی بر $a|b$ و $a|c$ یا وجود ندارد به عنوان مثال $8|4\times 6$ ولی هیچ یک از رابطه‌های $8|4$ و $8|6$ برقرار نیستند. ولی اگر $a|b.c$ و $(a,b)=1$ آنگاه رابطه $a|c$ برقرار خواهد بود، به عبارت دیگر اگر $\frac{b.c}{a}\in z$ (یعنی $b.c$ بتواند a را ساده کند و هیچ قسمتی از a با b ساده نشود.

(چون $(a,b)=1$) آنگاه به ناچار باید کل a را c ساده کند یعنی باید c بر a بخش پذیر باشد .

نکته: اگر p عددی اول و a و b اعداد صحیحی چنان باشند که $p|a.b$ آنگاه حداقل یکی از دو عدد a یا b بر p بخش پذیر است، یعنی:

$$p|a.b\Rightarrow(p|a)\cup(p|b)$$

مثال: بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک اعداد 180 و 1380- را بیابید.

تست: دو عدد 24 و 42 چند مضرب مشترک 4 رقمی دارند؟

1) 51
2) 54
3) 56
4) 57

نکته: اگر m عددی طبیعی باشد آنگاه تعداد مضارب m در بین اعداد $1,2,3,\dots,n$ برابر $\left[\frac{n}{m}\right]$ و در بین اعداد $k,k+1,k+2,\dots,n$ برابر $\left[\frac{n}{m}\right]-\left[\frac{k-1}{m}\right]$ است.

مثال: ب.م.م و ک.م.م اعداد 120و420-و308 را بیابید .

مثال: چند عدد طبیعی کوچکتر از 10000 وجود دارد که:

الف) هم مضرب 84 باشد و هم مضرب 60؟

ب) مضرب 84 باشد ولی مضرب 60 نباشد؟

ج) نه مضرب 84 باشد و نه مضرب 60؟

مثال: اگر کوچکترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی 1397 باشد آنگاه ب.م.م آنها چه میتواند باشد؟

تست: کوچکترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی، 13 برابر کوچکترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد است. اگر مجموع این دو عدد 126 باشد، آنگاه ب.م.م کدام است؟

1) 12
2) 9
3) 18
4) 16

مثال: نسبت دو عدد صحیح و مثبت برابر $\frac{5}{6}$ بوده و می دانیم تفاضل کوچکترین مضرب مشترک آن دو از حاصل ضربشان برابر 3960 است. آن دو عدد را بیابید.

توجه: اگر دو کسر با هم برابر باشند، و هر دوی آنها به اندازه امکان ساده شده باشند، به طوری که هر دوی آنها چنان باشند که صورتشان نسبت به مخرجشان اول باشد آنگاه آن دو کسر صورتشان با هم و مخرجشان نیز با هم برابر خواهد بود.

تست: مجموع دو عدد طبیعی برابر 576 و ب.م.م آن دو عدد برابر 36 است. کمترین مقدار طبیعی برای تفاضل آن دو عدد کدام است؟

1) 72
2) 108
3) 144
4) 216

مثال: اگر $(a,b)=6$ آنگاه $(a+b,a-b)$ چه مقادیری می تواند باشد ؟

مثال: a و b چه شرایطی داشته باشند تا:

الف) $(a,b)=|a|$ ب) $[a,b]=|a|$

مثال: اگر دو عدد طبیعی a و b چنان باشند که $(a^3,b^3)=(-25a,-25b)$ و $[a,b]=90$ آنگاه حاصل ab را بیابید.

تمرینات تستی این بخش:

1. کدام گزینه درست است؟

1) $(a+b)\left|(a+b)^2-2ab\right.$

2) $(a+b)\left|(a+b)^3-3a^2b-3ab^2\right.$

3) $(a+b)\left|(a-b)^3+3a^2b-3ab^2\right.$

4) $(a+b)\left|(a-b)^2+2ab\right.$

2. به ازای کدام مقدار طبیعی n رابطه $82\left|3^n+1\right.$ برقرار است ؟

1) 15

2) 20

3) 16

4) 18

3. اگر $2^7+1\left|2^k-1\right.$ آنگاه k کدام می تواند باشد ؟

1) 84

2) 77

3) 35

4) 25

4. اگر $A=\{8k\,|\,k\in z\}$ و $B=\{12k\,|\,k\in z\}$ آنگاه در درون مجموعه $A\cap B$ چند عدد سه رقمی وجود دارد ؟

1) 37

2) 38

3) 9

4) 10

5. چند زوج عدد طبیعی وجود دارد که بین کوچکترین مضرب مشترک و خود دو عدد رابطه‌ی $M=a+b$ برقرار باشد؟

1) 0
2) 1
3) 2
4) بی‌شمار

6. مجموع دو عدد طبیعی برابر 204 و ب.م.م آنها 12 است. چند دسته عدد طبیعی چنین خاصیتی را دارند؟

1) 5
2) 6
3) 7
4) 8

7. اگر ب.م.م دو عدد 12 باشد، آنگاه ک.م.م آن دو عدد کدام می تواند باشد؟

1) 40
2) 84
3) 66
4) 100

8. چند زوج عدد طبیعی وجود دارد که بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها 15 و کوچکترین مضرب مشترک آنها 48×15 باشد ؟

1) 2
2) 4
3) 8
4) 1

9. حاصل $(5a^2+1,6)$ به ازای مقادیر مختلف a چند مقدار متمایز می تواند باشد؟

1) 2
2) 3
3) 4
4) 5

10. اگر a و b دو عدد طبیعی چهار رقمی باشند، آنگاه حاصل $\left(a-b,[a,b],(a,b)\right)$ کدام است؟

1) $|a-b|$
2) 1
3) $[a,b]$
4) (a,b)

11. اگر $a|b_2$ آنگاه حاصل $\left([a^2,b^4],(a,b^2)\right)$ کدام است؟

1) $|a|$
2) $|b|$
3) a^2
4) b^2

12. اگر $[a,b]=(a,b)+1$ ، حاصل a^2+b^2 کدام است؟

1) 5
2) 13
3) 17
4) 25

13. نسبت دو عدد طبیعی برابر $\frac{39}{61}$ بوده و بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها برابر 39 است، عدد بزرگتر کدام است؟

1) 2379
2) 1379
3) 1397
4) 2397

14. به ازای بعضی مقادیر طبیعی برای n، دو عدد $5n+2$ و $3n-1$ نسبت به هم اول نیستند، در آن صورت مجموع ارقام ب.م.م آن دو عدد کدام است؟

1) 11
2) 13
3) 14
4) 15

15. به ازای تمام مقادیر طبیعی برای n، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $7n+1$ و $6n-5$ چند مقدار متمایز می تواند باشد؟

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

16.اگر $b|a+c$ و $a^3+c^3|bd+c$ آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

1) $c|b$
2) $c|a$
3) $b|c$
4) $a|c$

17. عدد $2^{10}+11^{10}$ به کدام عدد بخش پذیر است؟

1) 5
2) 7
3) 9
4) 13

18. عدد $5^{25}-3^{25}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

1) 28
2) 22
3) 33
4) 35

19.اگر $A=\{12k|k\in z\}$ و $B=\{28k|k\in z\}$ آنگاه چند عدد طبیعی کوچکتر از 1000 در درون $A\cup B$ وجود دارد؟

1) 105
2) 106
3) 107
4) 108

20. اگر $(a,b)=12$ و $(a,c)=28$ و $(b,c)=d$ آنگاه d کدام می تواند باشد؟

1) 21
2) 99
3) 65
4) 66

21. اگر عدد طبیعی n چنان باشد که $\left[81, n^2\right] = 9n$ ، آنگاه $\left(27, n\right)$ کدام است؟

1) 1
2) 3
3) 9
4) 27

22. اگر $\left[a, a+1\right] = b$ و $\left[a, a+2\right] = c$ و $c > b$ آنگاه چه تعداد از اعداد a، b، c و $\frac{c+1}{2}$ عددی فرد هستند؟

1) 4
2) 3
3) 2
4) 1

23. به ازای چند مقدار طبیعی برای n دو عدد $n^2 - n$ و $n^2 + n$ نسبت به هم اول می شوند؟

1) 0
2) 1
3) 4
4) بی شمار

24. مجموع دو عدد طبیعی نه برابر تفاضل آن دو عدد است، کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد کدام می تواند باشد؟

1) 240
2) 272
3) 330
4) 415

25.اگر $(a,b)=12$ و $a^2+b^2=4176$ آنگاه $a+b$ کدام است؟

1) 72

2) 96

3) 90

4) 84

26.اگر دو عدد a و b نسبت به هم اول نباشند و بین کوچکترین مضرب مشترک آنها (M) و بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها (d) رابطه $M=28d+3$ برقرار باشد، آنگاه:

1) $a-b=28$

2) $a-b=87$

3) $a-b=93$

4) $a-b=84$

27. اگر $5M=9d+11$ و $d\neq 1$ آنگاه مجموع دو عدد کدام است؟

(d بزرگترین مقسوم علیه مشترک و M کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد است)

1) 50

2) 165

3) 33

4) 66

28. بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ، 8 و مجموع آنها 128 است. تفاضل دو عدد کدام می تواند باشد؟

1) 80

2) 48

3) 64

4) 112

29. اگر کوچکترین مضرب مشترک دو عدد 90 برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها باشد، آنگاه نسبت دو عدد کدام نمی تواند باشد ؟

1) $\frac{2}{5}$

2) $\frac{9}{10}$

3) $\frac{2}{45}$

4) $\frac{5}{18}$

تقسیم:

اگر a عدد صحیح و b عددی طبیعی باشند، آنگاه دو عدد صحیح منحصر به فردی مانند r و q چنان یافت می‌شوند که اولاً $a=bq+r$ و ثانیاً $a<r<b$ در این حالت a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را خارج قسمت و بالاخره r را باقی مانده می گویند.

مثال: عدد 1397- را بر 12 تقسیم کرده و خارج قسمت و باقیمانده را بیابید.

حل:

$$\begin{array}{r|l} -1397 & 12 \\ \cline{2-2} -12 & -117 \\ \cline{1-1} -19 & \\ -12 & \to q=-117, r=7 \\ \cline{1-1} -77 & \\ -84 & \\ \cline{1-1} +7 & \end{array}
\quad \xrightarrow{\text{ادامه}} \quad
\begin{array}{r|l} -1937 & 12 \\ \cline{2-2} -1200 & -100 \\ \cline{1-1} -197 & \end{array}$$

توجه کنید که تقسیم فوق کاملا شبیه تقسیم عددی مثبت بر عدد مثبت دیگر است، فقط در مرحله آخر برای آنکه باقیمانده منفی نباشد رقم یکان خارج قسمت چنان نوشته شده است که 84- از 77- کمتر باشد، به عبارت دیگر اگر عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b بخش پذیر نباشد، آنگاه:

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} r & \end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{c|c} -a & b \\ \cline{2-2} & -(q+1) \\ \cline{1-1} b-r & \end{array}$$

مثال: اگر در یک تقسیم به مقسوم 1397 واحد و به مقسوم علیه 7 واحد اضافه کنیم خارج قسمت تغییر نکرده ولی از باقی مانده 10 واحد کم می شود. خارج قسمت را بیابید.

مثال: در یک تقسیم مقسوم علیه 52 و باقیمانده 19 است. حداکثر چند واحد میتوان به مقسوم، اضافه کرد به شرط آنکه خارج قسمت و مقسوم علیه تغییر نکند؟

مثال: در یک تقسیم خارج قسمت 11 و باقیمانده 74 است. حداکثر چند واحد میتوان به مقسوم علیه اضافه کرد به شرط آنکه خارج قسمت و مقسوم تغییر نکنند؟

مثال: اگر در یک تقسیم مقسوم 1397 و خارج قسمت 19 باشد، آنگاه مقسوم علیه چه مقادیری می تواند باشد؟

مثال: هر یک از اعداد 2018، 1397، 1512 در تقسیم بر عدد طبیعی b $(b \neq 1)$ باقیمانده یکسان r دارند. b و r را بیابید.

مثال: اعداد a و b در تقسیم بر 24 به ترتیب باقی مانده های 7 و 15 دارند. باقیمانده تقسیم هر یک از اعداد زیر بر 24 را تعیین کنید.

الف) $2a+b$ ب) $a.b$ ج) $a^2+3b-1397$

مثال: عدد a در تقسیم بر هر یک از اعداد 8 و 9 به ترتیب باقیمانده های 5 و 7 را دارد. عدد a در تقسیم بر 72 چه باقیمانده ای دارد؟

مثال: بزرگترین عدد طبیعی a را چنان بیابید که در تقسیم بر 34 باقی مانده $\frac{1}{12}$ مربع خارج قسمت باشد .

تمرینات تستی این بخش

1. باقیمانده تقسیم عدد A بر 12 برابر 8 است. باقیمانده تقسیم عدد A+141 بر 12 کدام است؟

1) 2
2) 3
3) 4
4) 5

2. در تقسیم عدد a بر 63 باقیمانده 17 است. اگر 60 واحد به a اضافه کنیم باقی مانده و خارج قسمت چه تغییری می کند؟

1) سه واحد کم می شود - یک واحد اضافه می‌شود.
2) سه واحد اضافه می‌شود - یک واحد اضافه می شود.
3) سه واحد اضافه می شود - تغییر نمی کند.
4) سه واحد کم می شود - دو واحد اضافه می‌شود.

3. در بین اعداد دو رقمی چند عدد در تقسیم بر 15 باقیمانده 13 دارد؟

1) 5
2) 6
3) 7
4) 8

4. مجموع ارقام بزرگترین عددی که در تقسیم بر 47 باقیمانده توان دوم خارج قسمت است کدام است؟

1) 16
2) 11
3) 12
4) 14

5. اگر باقیمانده تقسیم عدد فرد a بر 8،4،2 یکسان باشد، باقیمانده تقسیم عدد a^2+6 بر 8،4،2 به ترتیب کدام است؟

1) 1و1و1
2) 1و3و7
3) 1و3و5
4) 0و0و0

6. اگر a مضرب ۶ نبوده و مضرب 3 باشد، باقیمانده a^2 بر 4 کدام است؟

1) 3
2) 1
3) 0
4) 2

7. در تقسیم عدد طبیعی a بر 29، باقیمانده تقسیم از مربع خارج قسمت 5 واحد بیشتر است. مجموع ارقام بزرگترین مقدار a کدام است؟

1) 10
2) 13
3) 12
4) 11

8. خارج قسمت و باقیمانده تقسیم 1397- بر 12 را به ترتیب q و r می‌نامیم. باقیمانده تقسیم q بر r کدام است؟

1) 4
2) 3
3) 2
4) 1

9. چند عدد طبیعی چهار رقمی وجود دارد که باقیمانده تقسیم هر یک از آنها بر 312 از مکعب خارج قسمت سه واحد بیشتر است؟

1) 4
2) 2
3) 3
4) 5

10. اگر باقیمانده تقسیم اعداد a و b بر 84 به ترتیب 52 و 19 باشد، باقیمانده تقسیم عدد $5a-3b$ بر 21 کدام است؟

1) 4
2) 2
3) 12
4) 14

11. باقیمانده تقسیم عدد $1000!$ بر 1398 کدام است؟

1) 0
2) 2
3) 699
4) 1396

12. باقیمانده تقسیم a بر اعداد 13 و 11 به ترتیب برابر 1 و 9 است. در صورتی که خارج قسمت دو تقسیم برابر باشد در این صورت خارج قسمت کدام است؟

1) 2
2) 3
3) 4
4) 5

13. اگر باقیمانده تقسیم عدد صحیح a بر اعداد 4 و 6 به ترتیب برابر 3 و 5 باشند، آنگاه باقیمانده تقسیم a بر 12 کدام است؟

1) 3
2) 5
3) 11
4) 8

14. اگر باقیمانده های تقسیم دو عدد $A=20\underset{\circ}{|}-8$ و $A=31\underset{\circ}{|}-1397$ بر 20 را به ترتیب a و b بنامیم آنگاه $|a-b|$ کدام است؟

1) 0
2) 5
3) 7
4) 3

15. در یک تقسیم خارج قسمت دو برابر باقیمانده است. اگر 6 واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم 2 واحد از خارج قسمت کم شده و باقیمانده صفر می گردد. مقسوم علیه این تقسیم کدام می تواند باشد؟

1) 13
2) 14
3) 15
4) 16

16. در یک تقسیم 119 واحد به مقسوم علیه اضافه کرده ایم، خارج قسمت تغییر نکرده ولی از باقیمانده k واحد کم شده است، k کدام می تواند باشد؟

1) 7
2) 8
3) 9
4) 10

17. در تقسیم عدد طبیعی a بر 17 باقیمانده $\frac{1}{10}$ خارج قسمت است، بیشترین مقدار ممکن برای a کدام است؟

1) 2491
2) 2542
3) 2736
4) 2812

18. اگر در تقسیم اعداد طبیعی a و a+146 بر عدد طبیعی b، باقی مانده ها به ترتیب برابر 22 و 20 باشند، آنگاه مجموع ارقام کمترین مقدار ممکن برای b کدام است؟

1) 10
2) 11
3) 12
4) 13

19. اگر در یک تقسیم، مقسوم 1397 واحد بیشتر از مقسوم علیه و باقیمانده تقسیم 109 باشد، آنگاه خارج قسمت کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟

1) 4
2) 6
3) 7
4) 9

20. در تقسیم اعداد 222 و 253 بر عدد طبیعی b باقیمانده ها به ترتیب 12 و 1 شده است. b چند مقدار متمایز می تواند باشد؟

1) 8
2) 5
3) 4
4) 3

21. عدد طبیعی a فرد بوده و در تقسیم بر 170 باقی‌مانده‌ای، مربع کامل، دارد. رقم یکان بزرگترین عدد سه رقمی a کدام است؟

1) 1
2) 3
3) 7
4) 9

22. در تقسیم عدد طبیعی a بر دو عدد طبیعی متوالی b و b+1 خارج قسمت ها به ترتیب q و $q-3$ و باقی مانده ها به ترتیب 3 و 2 شده‌اند، رقم یکان کوچکترین مقدار ممکن برای a کدام است؟

1) 2
2) 3
3) 6
4) 7

23. در تقسیم عدد a بر b باقی مانده 16 برابر خارج قسمت است. اگر از مقسوم علیه N واحد کم کنیم به خارج قسمت 3 واحد اضافه شده است و باقیمانده صفر می شود، ماکزیمم مقدار a کدام است؟

1) 198
2) 181
3) 175
4) 164

24. اگر a بر 20 و b بر 12 بخش پذیر باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم a بر b کدام یک از گزینه های زیر است ؟

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6

کاربردهایی از تقسیم:

با توجه به قضیه تقسیم معلوم می‌شود که عدد صحیح a در تقسیم بر عدد طبیعی m یکی از باقیمانده‌های 0،1،2،...وm-1 را می‌آورد. بنابراین عدد a را به یکی از m فرم mk، mk+1 ، mk+2 و ... mk+(m-1) می توان نوشت، به عنوان مثال هر عدد صحیحی در تقسیم بر 3 به یکی از سه صورت 3k و 3k+1 و (3k+2یا 3k-1) نوشته می‌شود. و نیز هر عدد صحیحی با توجه به زوج و فرد بودنشان به ترتیب به صورت 2kو 2k+1 قابل نمایش هستند.

نکته: مربع هر عدد زوجی مضرب 4 است، زیرا:

$$? = (2k)^2 = 4k^2 = 4q$$

نکته: با توجه به این که حاصل ضرب هر دو عدد متوالی، زوج است، معلوم می‌شود که مربع هر عدد فردی در تقسیم بر 8 باقیمانده 1 می آورد، زیرا:

$$? = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 4(2q) + 1 = 8q + 1$$

نکته: مربع هیچ عدد صحیحی در تقسیم بر 3 باقیمانده 2 نمی‌آورد، زیرا اگر آن عدد به صورت 3k باشد آنگاه مربع آن به صورت 9q بوده و در تقسیم بر 3 باقیمانده صفر خواهد آورد و اگر آن عدد به صورت 3k+1 و 3k+2 باشد، آنگاه مربع آن عدد به ترتیب به صورت $9k^2+6k+1$ و $9k^2+12k+4$ خواهد شد که هر دوی آنها در تقسیم بر 3 باقیمانده یک می آورد.

نکته: هیچ مربع کاملی نمی‌تواند به یکی از ارقام 7،3،2و یا8 ختم می شود (برای اثبات این موضوع برای عدد اولیه 10 حالت در نظر بگیرید که در حالت اول، رقم یکان عدد اولیه برابر صفر، در حالت دوم برابر یک، و در حالت دهم برابر 9 باشد.

مثال: معادله‌ی $x^2+y^2=1399$ در مجموعه اعداد صحیح چند دسته جواب دارد؟

تست: کدام یک از اعداد زیر مربع کامل است؟

1) 74519
2) 74529
3) 74539
4) 74549

تست: از بین اعداد 1و11و111و111 ، چه تعدادی مربع کامل هستند؟

1) 1
2) 2
3) 3
4) بیش از 3

تست: مجموع ارقام بزرگترین عدد طبیعی سه رقمی مانند n عینک که در رابطه $7|11n-3$ صدق کند، کدام است؟

1) 21
2) 22
3) 23
4) 24

مثال: اگر $5|2n+9$ آنگاه ثابت کنید $25|n^2+9n+39$

مثال: کوچکترین عدد طبیعی چهار رقمی را چنان بیابید که در تقسیم بر اعداد 9 و 14 به ترتیب باقی مانده های 7 و 3 داشته باشند.

مثال: کوچکترین عدد چهار رقمی که در تقسیم بر 24 باقی مانده 17 و در تقسیم بر 42 باقی مانده 19 داشته باشد را بیابید.

مثال: کوچکترین عدد طبیعی را چنان بیابید که در تقسیم بر 72 باقیمانده 53 و در تقسیم بر 90 باقیمانده 65 داشته باشد.

مثال: عددی در تقسیم بر 6 باقیمانده 4 دارد. آن عدد در تقسیم بر 42 چه باقیمانده هایی می تواند داشته باشد؟

مثال: عدد صحیحی در تقسیم بر 72 باقیمانده 53 دارد، آن عدد در تقسیم بر 90 چه باقی مانده هایی را می تواند داشته باشد؟

پرسش های چهار گزینه این بخش:

1. عددی در تقسیم بر 15 باقیمانده 11 دارد، آن عدد در تقسیم بر 60 کدام باقیمانده را نمی تواند داشته باشد؟
   1) 11
   2) 41
   3) 56
   4) 28

2. اگر n و k دو عدد صحیح باشند آنگاه کدام یک از معادلات زیر در z فاقد جواب است؟

1) $n^2=8k$

2) $n^2=8k+1$

3) $n^2=8k+4$

4) $n^2=8k+6$

3. کدام یک از مجموعه های زیر چنان است که حاصل ضرب هر دو عدد عضوی از آن مجموعه باز عضوی از همان مجموعه است؟

1) $A=\{12k+9 | k\in z\}$

2) $B=\{8k+3 | k\in z\}$

3) $C=\{11k+8 | k\in z\}$

4) $D=\{7k+4 | k\in z\}$

4. اگر x و y اعداد فرد طبیعی باشند، بزرگترین مقسوم علیه مشترک تمام اعداد به صورت $3x^2+5y^2$ کدام است؟

1) 4

2) 8

3) 16

4) 24

5. اگر $a=12n+19$ و $b=8n-7$ دو عدد صحیح باشند، آنگاه به ازای چند مقدار طبیعی برای n رابطه‌ی $8|b^2-a^2$ برقرار است؟

1) 2

2) 4

3) 8

4) بی شمار

6. چند عدد مربع کامل وجود دارد که به صورت $4k+3$ باشد؟
1) 0
2) 1
3) 2
4) بیش از 2

7. مربع چه تعداد از اعداد سه رقمی از 120 تا 130 به صورت $8k+1$ است؟
1) 1
2) 3
3) 4
4) 5

8. کوچکترین عدد سه رقمی که در رابطه‌ی $7|5n+3$ به جای n صدق کند چه رقم یکانی دارد؟
1) 3
2) 4
3) 5
4) 6

9. کدام یک از اعداد زیر معادل $7k+5$ است؟
1) $7q-5$
2) $7q-4$
3) $7q-3$
4) $7q-2$

10. اگر آب عددی زوج باشد، آنگاه بزرگترین عددی که $a\left(a^2-4\right)$ همواره بر آن پخش پذیر است، کدام است؟

1) 32
2) 36
3) 48
4) 96

11. اگر حاصل ضرب سه عدد طبیعی x،y وz زوج باشد، باقیمانده تقسیم $x^2+y^2+z^2$ بر 4 کدام عدد نمی تواند باشد؟

1) 0
2) 1
3) 2
4) 3

12. اگر $A=\left\{2^k \middle| k\in N\right\}$ و $B=\left\{k^2-2 \middle| k\in N\right\}$ آنگاه $n\left(A\cap B\right)$ کدام است؟

1) 1
2) 2
3) 3
4) بیش از 3

13. مجموع ارقام کوچکترین عدد سه رقمی n که گزاره‌ی $7|11n-3$ را به گذاره‌ای درست تبدیل می‌کند، کدام است؟

1) 3
2) 4
3) 9
4) 5

هم نهشتی:

اگر هر دو عدد صحیح a و b در تقسیم بر عدد طبیعی $m\ (m \ge 2)$ باقیمانده‌ی یکسانی مانند r داشته باشند آنگاه دو عدد a و b را هم نهشت با یکدیگر به پیمانه‌ی (سنج) m گویند و آن را به صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ نمایش می دهند. به عبارت دیگر $a \overset{m}{\equiv} b$ معادل با تساوی $a-b=mq$ می باشد. به عنوان مثال دو عدد 134 و ۹595 به پیمانه‌ی 13 با یکدیگر هم نهشت هستند زیرا هر دو تای آنها در تقسیم بر 13 باقیمانده 4 دارند یا به عبارت دیگر $134-95=39=13k$

تست: دو عدد 78 و 33 به پیمانه‌ی $m\ (m>2)$ با هم هم نهشت هستند. m چند مقدار متمایز می تواند داشته باشد؟

1) 4
2) 5
3) 6
4) 7

خواص هم نهشتی:

در همه گزینه های زیر a،b،cوd اعداد صحیح و m عددی طبیعی بزرگتر از 1 می باشد:

1. یک هر مضربی از پیمانه، در تقسیم بر پیمانه باقیمانده صفر دارد. $k.m \overset{m}{\equiv} 0$

2. دو بازتابی داشتن هم نهشتی $a \overset{m}{\equiv} a$

3. سه متقارن بودن هم نهشتی $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow b \overset{m}{\equiv} a$

4. چهار متعددی بود هم نهشتی $\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow\begin{cases}a+c\overset{m}{\equiv}b+c\\a-c\overset{m}{\equiv}b-c\\a.c\overset{m}{\equiv}b.c\end{cases}$$ .5

این ویژگی نشان می دهد که جمع، تفریق، ضرب کردن طرفین هم نهشتی در یک عدد صحیح مجاز است. ولی تقسیم کردن طرفین هم نهشتی به یک عدد صحیح شرایطی لازم دارد که در ویژگی بعدی مشاهده خواهید کرد. البته توجه داشته باشید که اگر طرفین هم نهشتی را در c ضرب کنیم می‌توان پیمانه را $m|c|$ نیز گذاشت.

$$\left.\begin{matrix}a.c\overset{m}{\equiv}b.c\\(m,c)=d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$$ .6

یعنی اگر طرفین هم نهشتی به عدد صحیحی مانند c تقسیم شود باید پیمانه ب.م.م c و پیمانه قبلی تقسیم شود. توجه داشته باشید که در اکثر مواقع c و پیمانه نسبت به هم اولند و پیمان تغییر نمی کند.

$$\left.\begin{matrix}a\overset{m}{\equiv}b\\c\overset{m}{\equiv}d\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a+c\overset{m}{\equiv}b+d\\a-c\overset{m}{\equiv}b-d\\c.a\overset{m}{\equiv}b.d\end{cases}$$ .7

اگر دو هم نهشتی با یک پیمانه برقرار باشند، آنگاه می توان طرفین آن ها را با هم جمع، تفریق و یا در هم ضرب کنیم و اما تقسیم طرفین آنها به یکدیگر مجاز نیست.

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n\ (n\in N)$$ .8

یعنی به توان طبیعی رساندن طرفین یک هم نهشتی عملی مجاز است که در حل مسائل کاربرد فراوانی دارد.

.9 $\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ m' | m \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{m'}{\equiv} b$

در یک هم نهشتی می توان پیمانه را برداشته و به جای آن مقسوم علیه‌ای از آن را قرار داد. که خیلی توصیه نمی شود چرا که ضعیف تر از خود هم نهشتی اولیه است.

.10 $\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

یکی از معدود ویژگی هایی است که نتیجه گیری آن دو طرفه است و دو عبارت معادل یکدیگرند. معلوم است که اگر a-b هم مضرب m باشند و هم مضرب n آنگاه a-b مضرب $[m,n]$ خواهد بود و بالعکس.

.11 $$\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b + k.m \\ a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b + k.m \end{array}$$

در یک هم نهشتی می توان به یک طرف دست نزد ولی به طرف دیگر مضربی از پیمانه اضافه یا کم کرد.

مثال: باقیمانده تقسیم عدد $73 \times 29^n + 31 \times 3^n$ بر 13 را بیابید.

مثال: باقیمانده تقسیم عدد $A = 3^{1394} + 52$ بر 7 را بیابید.

مثال: باقیمانده تقسیم عدد $A=1394^{2015}$ بر اعداد 3،5،7،9،11،13،17،19،23 را بیابید.

مثال: اگر عدد صحیح a چنان باشد که $a \overset{12}{\equiv} 8$ آنگاه عدد a در تقسیم بر اعداد 4،3،60و28 چه باقی مانده و یا باقی مانده هایی خواهد داشت؟

مثال: کوچکترین عدد طبیعی را چنان بیابید که در تقسیم بر 18 باقیمانده 11 و در تقسیم بر 30 باقیمانده 21 داشته باشد.

مثال: کوچکترین عدد طبیعی 4 رقمی که در تقسیم بر 18 باقیمانده 11 و در تقسیم بر 30 باقیمانده 17 داشته باشد را بیابید.

مثال: کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که در تقسیم بر 65 و 31 به ترتیب باقیمانده‌های 53 و 19 را داشته باشد.

مثال: هر یک از معادلات زیر را در مجموعه اعداد صحیح حل کنید:

الف) $7x\overset{13}{\equiv}5$ ب) $14x\overset{17}{\equiv}27$

ج) $12x\overset{15}{\equiv}11$ د) $12x+19\overset{15}{\equiv}3-7x$

نکته: شرط لازم و کافی برای آن که معادله‌ی $ax\overset{m}{\equiv}b$ در Z جواب داشته باشد آن است که $(a,m)|b$.

مثال: کوچکترین عدد چهار رقمی که در دستگاه زیر صدق می کند را بیابید.

$$\begin{cases}893x\overset{24}{\equiv}2015^{1393}\\1394x\overset{28}{\equiv}13^{94}+1\end{cases}$$

مثال: کوچکترین مقدار طبیعی a را چنان بیابید که $3a+17$ مضرب 23 باشند.

تست: از رابطه‌ی هم نهشتی $72a \overset{30}{\equiv} 132b$ کدام یک از روابط زیر قابل نتیجه شون نمی باشد؟

1) $6a \overset{30}{\equiv} 11b$

2) $6a \overset{5}{\equiv} 11b$

3) $a-b \overset{5}{\equiv} 0$

4) $7a \overset{35}{\equiv} 42b$

تست: باقیمانده تقسیم عدد $5^{7^{10}}$ بر 13 کدام است؟

1) 3

2) 4

3) 5

4) 6

تست: اگر $A=\sum_{i=1}^{n} i$ آنگاه باقیمانده تقسیم A^3-2A^2+4A-5 بر 36 کدام است؟

1) 14

2) 16

3) 20

4) 22

تست: کدام یک از معادلات زیر در Z جواب ندارد؟

1) $13x+2\overset{15}{\equiv}5x-4$
2) $19x-43\overset{12}{\equiv}3x+3$
3) $14x-1\overset{15}{\equiv}5x+8$
4) $21x-19\overset{12}{\equiv}7x+7$

تست: اگر A در تقسیم بر اعداد 12 و 17 به ترتیب باقی مانده های 11 و 14 داشته باشد، آنگاه A در تقسیم بر 204 چه باقی مانده ای دارد؟

1) 155
2) 99
3) 167
4) 123

تست: اگر نهم اردیبهشت سالی یکشنبه باشد، آنگاه پنجم بهمن ماه آن سال چه روزی خواهد بود؟

1) پنجشنبه
2) جمعه
3) شنبه
4) یکشنبه

پرسش های چهار گزینه‌ای این بخش:

1. اگر باقیمانده تقسیم A بر 13 برابر 9 باشد، باقیمانده تقسیم A^2-2A در 13 کدام است؟

1) 1
2) 2
3) 9
4) 11

2. باقی مانده‌ی $\sum_{n=1}^{100} n!$ بر 12 کدام است؟

1) 14
2) 1
3) 2
4) 9

3. باقیمانده تقسیم a بر 8 برابر 7 است. باقیمانده تقسیم $(2a+1)$ بر 4 کدام است؟

1) 1
2) 2
3) 3
4) 0

4. اگر باقیمانده تقسیم a بر 99 برابر 25 باشد، باقیمانده تقسیم a بر 9 کدام است؟

1) 7
2) 3
3) 5
4) 4

5. باقیمانده تقسیم $2^{28}+3^{28}+4^{28}+5^{28}$ بر 5 کدام است؟

1) 0
2) 4
3) 1
4) 3

6. اگر باقیمانده تقسیم عدد صحیح a بر 6 و 8 به ترتیب برابر 2 و 6 باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم آن عدد بر 24 کدام است؟

1) 6
2) 12
3) 14
4) 7

7. رقم یکان کوچکترین عدد چهار رقمی n که در رابطه‌ی $9|5n+3$ صدق کند کدام است؟

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

8. باقیمانده تقسیم $52\times39^{n+7}+14\times6^{n+7}$ بر 11 کدام است؟

1) 0
2) 1
3) 6
4) 5

9. چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که به پیمانه‌ی 19 را 1398- هم نهشت باشند؟

1) 48
2) 45
3) 46
4) 47

10. باقیمانده تقسیم عدد $1841+2$ بر 43 کدام است؟

1) 4
2) 39
3) 37
4) 6

11. چند عدد طبیعی مانند n کوچکتر از 60 وجود دارد به طوری که 5^n+1 مضرب 13 باشد؟

1) 14
2) 15
3) 30
4) 29

12. اگر اول فروردین سالی چهارشنبه باشد، آنگاه پنجم تیرماه آن سال چند شنبه خواهد بود؟

1) سه شنبه
2) چهارشنبه
3) پنج‌شنبه
4) دوشنبه

13. اگر $104 \overset{m}{\equiv} 149$ و $m \geq 2$ آنگاه برای m چند جواب متمایز یافت می شود؟

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6

14. اگر $96x \overset{15}{\equiv} 18y$ ، آنگاه کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

1) $32x \overset{15}{\equiv} 6y$

2) $48x \overset{5}{\equiv} 9y$

3) $48x \overset{30}{\equiv} 9y$

4) $32x \overset{30}{\equiv} 6y$

15. باقیمانده تقسیم عدد N بر 15 برابر 14 است، باقیمانده تقسیم $N^{-18} + N^{2}$ بر 15 کدام است؟

1) 1

2) 2

3) 13

4) 14

16. تعدادی مداد را در بسته های 16 تایی بسته بندی کرده ایم، 3 مداد باقی مانده است. همان تعداد را در بسته های 28 تایی بسته بندی کرده ایم، باز 3 مداد باقی مانده است. تعداد مداد ها کدام می تواند باشد؟

1) 216

2) 339

3) 230

4) 360

17. باقیمانده تقسیم عدد 5^{n} بر 17 برابر 14 است. باقیمانده n بر 17 کدام است؟

1) 2

2) 3

3) 12

4) 13

18. اگر $S=1!+3!+5!+\dots+99!$ آنگاه باقی مانده S^S بر 7 کدام است؟

1) 0
2) 1
3) 2
4) 6

19. باقیمانده تقسیم عدد 65^{40} بر 9 کدام است؟

1) 7
2) 3
3) 4
4) 2

20. باقیمانده تقسیم $A=1!+3!+5!+\dots+1397!$ بر 90 کدام است؟

1) 63
2) 27
3) 0
4) 10

21. باقیمانده تقسیم $A=2^{3n+2}+3^{3n-1}$ بر 7 برابر 2 شده است، n کدام است؟

1) هر عدد طبیعی
2) اعداد فرد طبیعی
3) اعداد زوج طبیعی
4) اعداد اول

22. عدد $2^k + 10$ مضرب 13 است. برای k چند مقدار دو رقمی یافت می شود.

1) 6

2) 7

3) 8

4) 9

23. باقیمانده تقسیم عدد 1373^{55} بر 11 کدام است؟

1) 0

2) 1

3) 9

4) 10

24. باقیمانده تقسیم $2018^{100} - 1397^{100}$ بر 207 کدام است؟

1) 0

2) 1

3) 205

4) 206

25. از اعداد طبیعی کوچکتر از 100 چند عدد در تقسیم بر 5 باقیمانده 30 و در تقسیم بر 7 باقیمانده 4 دارند؟

1) 0

2) 1

3) 2

4) 3

26. اگر $S=\sum_{i=1}^{100} i$ آنگاه باقی مانده S^3+2S^2-3S+2 بر 20 کدام است؟

1) 16
2) 17
3) 18
4) 19

27. کوچکترین عدد طبیعی که در تقسیم بر 10 باقیمانده 9، در تقسیم بر 9 باقیمانده 8، در تقسیم بر 8 باقیمانده 7 و به همین ترتیب تا سرانجام در تقسیم بر 2 باقیمانده 1 داشته باشد، برابر است با:

1) 2159
2) 1259
3) 2519
4) 1529

28. اگر کوچکترین عدد چهار رقمی مانند n که در هر دو رابطه‌ی $7|3n+2$ و $5|8n-1$ صدق کند را A بنامیم، آنگاه رقم یکان A کدام است؟

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

29. اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $(a.m)=2$ آنگاه حاصل $(3b^2,3m^2)$ کدام است؟

1) 4
2) 6
3) 12
4) 18

30. باقیمانده تقسیم $A = 1! + 3! + 5! + \ldots + 100!$ عدد بر 35 کدام است؟

1) 2
2) 3
3) 32
4) 33

دسته های هم نهشتی:

هم نهشتی به پیمانه‌ی m مجموعه اعداد صحیح را به m گروه (دسته) افراز می‌کند که به هر یک از آن گروه ها یک دسته هم ارز می گویند.

به عنوان مثال هم نهشتی به پیمانه 7 مجموعه اعداد صحیح را به 7 مجموعه به صورت زیر تقسیم می کند:

$$A_0 = \{\ldots\ldots, -14, -7, 0, 7, 14, \ldots\ldots\}$$

$$A_1 = \{\ldots\ldots, -13, -6, 1, 8, 15, \ldots\ldots\}$$

$$A_2 = \{\ldots\ldots, -12, -5, 2, 9, 16, \ldots\ldots\}$$

$$A_3 = \{\ldots\ldots, -11, -4, 3, 10, 17, \ldots\ldots\}$$

$$A_4 = \{\ldots\ldots, -10, -3, 4, 11, 18, \ldots\ldots\}$$

$$A_5 = \{\ldots\ldots, -9, -2, 5, 12, 19, \ldots\ldots\}$$

$$A_6 = \{\ldots\ldots, -8, -1, 6, 13, 200, \ldots\ldots\}$$

به هر یک از مجموعه های فوق، یک کلاس هم ارزی یا دسته هم نهشتی گویند، بنابراین کلاس هم ارزی یا دسته هم نهشتی a، عبارت است از مجموعه ای از اعداد صحیح که هر یک از اعضای آن به پیمانه m با a هم نهشت باشند، و آن را به صورت $[a]_m$ نمایش می دهند، یعنی:

$$\boxed{[a]_m = \left\{ x \mid x \in z, x \overset{m}{\equiv} a \right\}}$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که در z_m عدد a با $km + a$ در یک کلاس هم ارزی قرار می‌گیرند (z_m یعنی افراز مجموعه اعداد صحیح به m کلاس هم ارزی)

تست: عدد 207- به کدام دسته هم نهشتی به پیمانه 8 تعلق دارد؟

1) $[1]$
2) $[3]$
3) $[5]$
4) $[7]$

تست: کدام دو عدد زیر متعلق به یک دسته هم نهشتی به پیمانه 7 هستند؟

1) $96, 27$
2) $96, 28$
3) $96, 26$
4) $96, 25$

تست: اگر $2a-1$ عضوی از دسته هم نهشتی $3-2a$ به پیمانه 6 باشد، آنگاه a کدام می تواند باشد؟

1) 1399
2) 1400
3) 1401
4) 1402

تست: در z_{11} عدد 1394- با a هم کلاس است، مجموع ارقام بزرگترین مقدار طبیعی سه رقمی برای a کدام است؟

1) 21
2) 22
3) 23
4) 24

تست: در هم نهشتی به پیمانه $m\ (m>1)$ ، سه عدد 19، 96، a در یک کلاس قرار دارند، رقم یکان کوچکترین مقدار طبیعی چهار رقمی برای a که تعداد کلاسها مینیمم باشد، کدام است؟

1) 4
2) 5
3) 6
4) 7

حل معادله سیال به صورت $ax+by=c$

نکته: شرط لازم و کافی برای آن که معادله مورد نظر در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب باشد، آن است که $(a,b)|c$ ،لازم به یادآوری است که معادله فوق معادل هم نهشتی های $ax\overset{b}{\equiv}c$ و $by\overset{a}{\equiv}c$ می باشد.

نکته: برای حل معادله سیال مورد اشاره، ابتدا طرفین معادله را به $(a,b)=d$ ساده می کنیم تا آن معادله به صورت $a'x+b'y=c'$ تبدیل شود، سپس آن معادله را به یکی از دو فرم $a'x\overset{b'}{\equiv}c'$ و یا $b'y\overset{a'}{\equiv}c'$ سپس از حل یکی از آنها، یکی از مجهول ها را یافته و حاصل را در معادله اصلی قرار می‌دهیم تا مجهول دیگر بدست آید.

نکته: اگر y_0, x_0 جواب‌هایی از معادله‌ی $ax+by=c$ باشد، آنگاه جواب کلی معادله به شکل زیر خواهند آمد:

$$\begin{cases} x = x_0 + k\dfrac{b}{(a,b)} \\ y = y_0 - k\dfrac{a}{(a,b)} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + kb' \\ y = y_0 - ka' \end{cases}$$

مثال: اگر معادله‌ی $84x+66y=5n=11$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب باشد، آنگاه n چه مقادیری را می تواند داشته باشد؟

حل: با توجه به نکته‌ی بالا لازم است $(84,66)|5n+11$ برقرار باشد:

$$6|5n+11 \Rightarrow 5n+11\overset{6}{\equiv}0 \Rightarrow 5n\overset{6}{\equiv}-11\overset{6}{\equiv}25 \Rightarrow$$
$$n\overset{6}{\equiv}5 \Rightarrow n=6k+5$$

مثال: اگر x و y جواب هایی از معادله‌ی $54x+21y=15$ باشند، آنگاه باقی مانده تقسیم عدد x بر 7 را بیابید.

مثال: معادله‌ی $84x+66y=6600$ در مجموعه اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

تست: معادله‌ی $15x+25y=7n+3$ در z جواب دارد، کوچکترین و بزرگترین عدد دو رقمی که به جای n می‌توان قرارداد را z و b می نامیم، $a+b$ کدام است؟

1) 110
2) 109
3) 108
4) 107

تست: معادله‌ی $87x-899y=(87,899)$ در مجموعه اعداد طبیعی با شرط $100 \le x \le 200$ و $10 \le y \le 40$ چند دسته جواب دارد؟

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6

تمرینات تستی این بخش:

1. اگر معادله‌ی $2x+by=1$ در z جواب داشته باشد آنگاه کدام ممکن است نادرست باشد؟

1) $(2,b)=1$
2) $(2,y)=1$
3) $(x,y)=1$
4) $(b,y)=1$

2. معادله‌ی $(x-7)(x-2)\overset{11}{\equiv}0$ چند جواب دو رقمی دارد؟

1) 15
2) 16
3) 17
4) 18

3. معادله هم نهشتی $42x\overset{14}{\equiv}6a$ به ازای کدام مقدار a در z جواب دارد؟

1) 13
2) 29
3) 21
4) 25

4. تعداد نقاط واقع بر خط $2x+5y=41$ که مختصات طبیعی دارند کدام است؟

1) 0
2) 2
3) 4
4) 6

5. کلاس هم نهشتی $[1397]$ در z_{14} با کدام کلاس برابر است؟

1) $[-5]$
2) $[-31]$
3) $[80]$
4) $[15]$

6. هرگاه $(x+2)\in[3]_7$ آنگاه مقدار ایکس کدام است؟

1) $3k+7$
2) $7k+1$
3) $7k+3$
4) $3k+2$

7. جواب معادله $25x\overset{11}{\equiv}1$ در مجموعه z کدام است؟

1) $x=11k+1$
2) $x=11k+4$
3) $x=11k-2$
4) $x=11k+7$

8. جواب معادله‌ی $3x \overset{17}{\equiv} 1$ کدام است؟

1) $[6]_{17}$

2) $[7]_{17}$

3) $[8]_{17}$

4) $[9]_{17}$

9. اگر عدد $3a-1$ به دسته هم ارزی $5-2a$ به پیمانه‌ی 9 تعلق داشته باشد، آنگاه a کدام می تواند باشد؟

1) 1398

2) 1399

3) 1400

4) 1401

10. معادله هم نهشتی $4x \overset{6}{\equiv} 2$ با کدام معادله جواب های یکسان دارد

1) $2x \overset{3}{\equiv} 1$

2) $2x \overset{6}{\equiv} 1$

3) $(4x)^2 \overset{36}{\equiv} 4$

4) $4x \times 6 \overset{6}{\equiv} 2 \times 6$

11. اگر معادله $ax+2y=3$ جواب صحیح نداشته باشد a کدام مقدار می‌تواند باشد؟

1) $a=3$

2) $a=5$

3) $a=1$

4) $a=4$

12. x در معادله‌ی سیاله‌ی $7x+17y=1000$ صدق می کند، باقیمانده x بر 17 کدام است؟

1) 15
2) 7
3) 2
4) 8

13. معادله‌ی سیاله‌ی $3x+6y=a+5$ به ازای کدام مقدار a جواب دارد؟

1) 12
2) 17
3) 13
4) 14

14. مجموع ارقام کوچکترین عدد سه رقمی x که در معادله‌ی $7x+13y=1$ صدق می کند کدام است؟

1) 11
2) 9
3) 13
4) 7

15. معادله‌ی $39x+26y=1300$ در N چند دسته جواب دارد؟

1) 14
2) 15
3) 16
4) 17

16. به ازای کدام مقدار n معادله‌ی $6x+12y=5n+3$ در z دارای جواب است؟

1) 103

2) 107

3) 105

4) 101

17. معادله‌ی $36x \overset{60}{\equiv} m$ در z جواب دارد. m چند عضو از اعضا مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,......,20\}$ را می تواند به خود اختصاص دهد؟

1) 15

2) 16

3) 17

4) 18

18. شخصی می خواهد 51 کیلوگرم برنج را در کیسه های 5 و 2 کیلوگرمی قرار دهد. مجموع تعداد کیسه های 2 و 5 کیلوگرم کدام یک از گزینه های زیر نمی تواند باشد؟

1) 24

2) 21

3) 16

4) 12

19. جواب معادله‌ی $7x \overset{13}{\equiv} 8$ به کدام صورت است؟

1) $13k-2$

2) $13k+2$

3) $13k-3$

4) $13k+3$

20. اگر $A=[3]_6$ و $B=[1]_4$ آنگاه $A\cap B$ کدام است؟

1) $[1]_2$

2) $[1]_{12}$

3) $[9]_{12}$

4) $[3]_{24}$

21. معادله‌ی $9x+13y=700$ چند زوج جواب طبیعی دارد؟

1) 7

2) 6

3) 8

4) 9

22.معادله‌ی $5x+10y=a^2+1$ به ازای چند مقدار $a\in\{1,2,......,100\}$ جواب دارد؟

1) 60

2) 50

3) 80

4) 40

23. در معادله‌ی $9x+5y=113$ چند جواب صحیح برای x در بازه‌ی $100<x<200$ پیدا می‌شود؟

1) 11

2) 15

3) 19

4) 20

24. معادله‌ی $9x+11y=1000$ چند زوج جواب در مجموعه اعداد طبیعی دارد؟

1) 9
2) 10
3) 11
4) 12

25. به ازای چند مقدار a از مجموعه‌ی $\{1,2,3,......,50\}$ ، معادله‌ی $ax+18y=3$ سیال دارای جواب است؟

1) 22
2) 25
3) 18
4) 27

26. عدد 711- به کدام کلاس هم ارزی به پیمانه‌ی 19 تعلق دارد؟

1) $[-239]$
2) $[-236]$
3) $[-235]$
4) $[-233]$

27. اگر دو عدد 50 و 127 متعلق به یک دسته هم نهشتی به پیمانه‌ی m، $(m>1)$ باشند و $(m,7)=1$ آنگاه عدد 1397 به کدام دسته‌ی هم نهشتی به پیمانه m تعلق خواهد گرفت؟

1) 4
2) 0
3) 7
4) 9

28. اگر $11 \le a < 30$ آنگاه به ازای چند مقدار a معادله $ax \overset{24}{\equiv} 9$ جواب دارد؟

1) 9
2) 10
3) 11
4) 12

29. جواب معادله‌ی $13x \overset{15}{\equiv} 2! + 3! + 4! + ... + 100!$ کدام است؟

1) 7
2) 14
3) 13
4) 1